Joachim Stiller

Materialien zur Mathematik V

Rekursionsgleichungen und -folgen

Additionsfolgen mit f0 = 2

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
2	0	2	2	4	6	10	2+2-Folge
2	1	3	4	7	11	18	Lucas-Folge (1+3-Folge)
2	2	4	6	10	16	26	2+2-Folge
2	3	5	8	13	21	34	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
2	4	6	10	16	26	42	2+2 Folge
2	5	7	12	19	31	50	

Teil 1

Allgemeiner Teil

Allgemeiner Teil

Die Fibonacci-Zahlen und die Zahl Pi

Gegeben seien vier aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen b-a, a, b, b+a. Bildet man aus diesen Zahlen ein Rechteck (siehe Abbildung), so ist die Differenz der zwei Winkel u-v gleich 45°. Dann ergibt sich also:

π / 4 = arctan (b / a) – arctan ((b – a) / (b + a))

und allgemein:

π / 4 = arctan (Fn+1 / Fn) – (Fn-1 / Fn+2)

Zum Beispiel wird für 3, 5, 8, 13

π / 4 = arctan (8 / 5) – arctan (3/13).

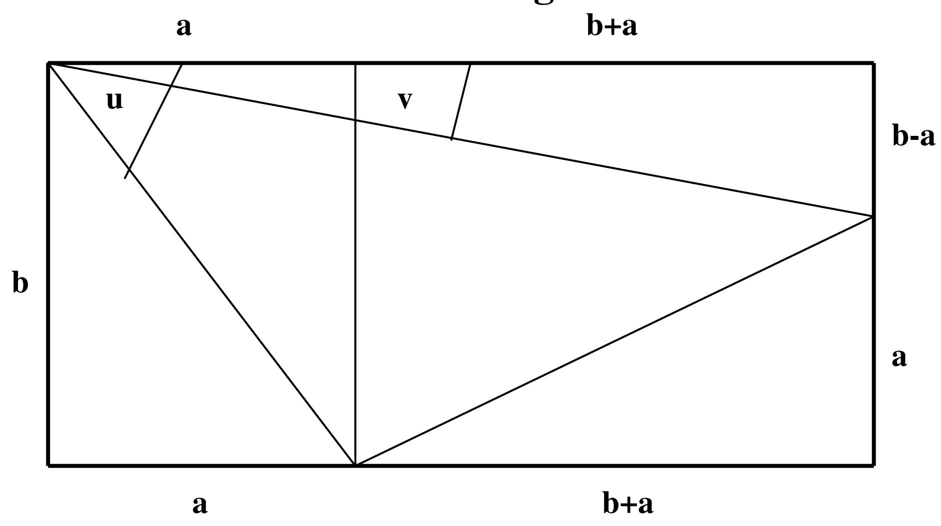
Diese Beziehung gilt auch für die Lucas-Zahlen und außerdem für jede beliebige Zahlenfolge, welche die Rekursionsgleichung

un+1 = un + un-1

erfüllt, zum Beispiel für 1, 7, 8, 15... wird

π / 4 = arctan (8 / 7) – arctan (1 / 15)

Zeichnung



π / 4 = arctan (b / a) – arctan ((b – a) / (b + a))

Zeckendorf-Zerlegung

Nach einer Entdeckung von Edouard Zeckendorf kann jede natürliche Zahl als Summe von zwei oder mehr, nicht notwendig aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dargestellt werden.

Zeckendorf-Zerlegung II

Nach meiner eigenen Entdeckung kann jede natürliche Zahl als Summe ein oder mehrerer, nicht notwendig aufeinanderfolgender Potenzen der Zahl 2 + der Zahl 1 dargestellt werden. Möglicherweise ist diese Zerlegung auch vor mir schon bekannt gewesen. Die zu dieser Folge gehörende Formel lauter:

fn = 2 x fn-1

In Zahlen ausgedrückt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Diese wirklich hübsche Folge stellt praktisch einen oberen Grenzwert für die Möglichkeiten einer Zeckendorf-Zerlegung dar. Sobald die Intervalle größer werden, ist eine Zeckendort-Zerlegung nicht mehr möglich. Die Intervalle müssen also kleiner oder gleich den Intervallen dieser Folge sein, wenn eine Zeckendorf-Zerlegung möglich sein soll.

Eine untere Grenzfolge stellt dann die Folge 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... dar.

Eine mittlere Grenzfolge stellt dann die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... dar, die Reihe der natürlichen Zahlen N. Auch sie genügt der Zeckendorf-Zerlegung.

Eine besondere Folge

Eine wie ich finde ebenfalls besonders hübsche Folge stellt diese dar:

fn = fn-1 + (n-1)

In Zahlen ausgedrückt: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...

Reihen und Konvergenz

Sehen wir uns folgende Folge an:

In Zahlen ausgedrückt: 1/2 1/4 1/8, 1/16, 1/32, 1/64. Diese Folge ist Konvergent.

Und nun die dazugehörige Reihe: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + ...

Die Summe dieser Reihe ist genau 1. Die Reihe ist Konvergent. Dadurch, dass aber die Summe dieser Reihe genau 1 ist, können wir uns überlegen, dass diese Reihe einen Grenzfall in Bezug auf die Konvergenz darstellt. Reihen, deren Intervalle kleiner oder gleich den Intervallen dieser Folge sind, sind grundsätzlich konvergent. Sind die Intervalle hingegen größer, so sind die Reihen invergent.
Ein Beispiel für eine weitere konvergente Reihe: 1/3 + 1/6 + 1/9 + 1/12 + 1/15 + 1/18
Die Summe dieser Reihe liegt bei genau 2/3, wie man sich leicht überzeugen kann.

Lucas-Folgen (allgemein)

Alle Lucas-Folgen sind durch folgende Rekursionsformel (Rekursionsgleichung) eindeutig bestimmt:

fn = f(n-1) + f(n-2) **für n größer gleich 2**

Jetzt muss ich nur noch die beiden Anfangswerte f0 und f1 festlegen, und die Lucas-Folge ist eindeutig und vollständig definiert. Das machen wir ganz allgemein so:

f0 = a und f1 = b.

Dabei sind a und b beliebige natürliche Zahlen der Menge N bzw. No. Wir arbeiten der Einfachheit zunächst ausschließlich mit der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich.

Eine weitere Rekursionsformel (Rekursionsgleichung) wäre beispielsweise:

fn = f(n-1) – f(n-2) **für n größer gleich 2**

Mit den Anfangswerten:

f0 = a und f1 = b,

wobei auch hier a und b beliebige natürliche Zahlen der Menge N bzw. No sind. Es wird aber schon hier deutlich, dass die Verknüpfung zwischen **f(n-1)** und **f(n-2)** völlig beliebig ist.

Die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge stellt eine spezielle Lucas-Folge dar. Sie ist wie folgt eindeutig definiert:

fn = f(n-1) + f(n-2) **für n größer gleich 2**

Mit den festgelegten Anfangswerten

f0 = 0 und f1 = 1

Manchmal lässt man auch f0 = 0 weg und schreibt

f1 = 1 und f2 = 1

Rekursionsgleichungen

Die folgende Rekursionsgleichung stellt eine bestimmte Vernüpfungsformel zweier Folgeglieder (Multipikations-Additions.-Multiplikations-Gleichung).

fn = a1 f(n-1) + a2 f(n-2) **für n größer gleich 2**

Dabei sind n, a1 und a2 natürlich Zahlen aus N bzw. No.

Rekursionsgleichungen (allgemein)

Eine allgemeine Form, auf die ich die Rekursionsgleichungen bringen konnte, lauter wie folgt:

fn = a1 f(n-b1) verknüpft mit a2 f(n-b2)   für n größer gleich b1 und b2

Dabei sind n, b1, b2, a1 und a2 natürliche Zahlen aus N bzw. No. Die Verknüpfung hingegen ist beliebig (+, -, x, /).

Nichtlineare Rekursionsgleichungen

Nichtlinare Rekursionsgleichungen haben die allgemeine Form:

fn = a f(n-1) x (–b f(n-1))   für n größer gleich 1

Gehen wir einmal die Entwicklungsschritte der nichtlinearen Rekursionsgleichungen durch:

1. Schritt: **fn = 2 f(n-1)**

2. Schritt: **fn = a f(n-1)**

3. Schritt: **fn = a f(n-1) x (-b f(n-1))**

Die Zahl fn wird praktisch mit dem negativen Wert von sich selbst multipliziert. So entsteht Nichtlinearität. Die Folge pendelt praktisch immer zwischen dem positiven und dem negativen Bereich hin und her.

Die Verhulst-Gleichungen - logistische Gleichungen

Eine ganz besondere Form einer nichtlinearen Rekursionsgleichung stellen die Verhulst-Gleichungen dar, die auch logistische Gleichungen genannt werden. Sie spielten in der Chaostheorie ebenfalls eine sehr große Rolle:

fn = a f(n-1) x (1 – f(n-1))
Oder allgemein: fn = a f(n-1) x (g – f(n-1))
(Multiplikations-Multiplikations-Subtraktions-Gleichung)

Rekursionsgleichungen (allgemein) II

Mit dieser Vorüberlegung kommen wir nun auch darauf, dass wir die Rekursionsgleichungen noch etwas allgemeiner fassen können. Es ergibt sich die dreifache Verknüpfungsformel in ihrer allgemeinen Form:

fn = (a1 verknüpft mit f(n-b1)) verknüpft mit (a2 verknüpft mit (f(n-b2))

Für die einzelnen Definitonsbereiche gilt, was weiter oben bereits gesagt wurde. Ebenso für die Verknüpfungsvorschriften.

Eine Liste der Rekursionsgleichungen

Die Verknüpfungsformel von zwei Folgegliedern in der allgemeinen Form I:

fn = f(n-1) verknüpft mit f(n-2)

mit n größer gleich 2.

Für diese Verknüpfungsformel gibt es genau vier mögliche Verknüpfungen: Plus (+), Minus (-), Mal (x) und Geteilt durch (/).

1. Fall: Die Additionsformel (Lucas-Folgen):

fn = f(n-1) + f(n-2) mit n größer gleich 2.

2. Fall: Die Subtraktionsformel:

fn = f(n-1) - f(n-2) mit n größer gleich 2.

3. Fall: Die Multiplikationsformel:

fn = f(n-1) x f(n-2) mit n größer gleich 2

4. Fall: Die Divisionsformel:

fn = f(n-1) / f(n-2) mit n größer gleich 2.

Die Verknüpfungsformel von zwei Folgegliedern in einer ebenfalls allgemeinen Form II:

fn = f(n-b1) verknüpft mit f(n-b2)

mit n größer gleich b1 und b2 (aus N).

Auch für diese Verknüpfungsformel in der allgemeinen Form gibt es vier mögliche Verknüpfungen (+, -, x, /).

Die Verknüpfungsformel für zwei Folgeglieder in einer ebenfalls allgemeinen Form III (Logistische Gleichungen):

fn = (a1 verkn. mit f(n-1)) verkn. mit (a2 verkn. mit f(n-2))

mit n größer gleich 2.

Besonderheit: Die Folge fn = 2 f(n-1) + f(n-2) heißt „Pell-Folge".

In der allgemeinen Form also: fn = a1 f(n-1) + a2 f(n-2) (kann, muss aber nicht linear sein).

Für diese Verknüpfungsformel von zwei Folgegliedern gibt es 4x4x4 = 4^3 = 64 mögliche Verknüpfungen der vier Grundrechenarten.

1. Fall: fn = (a1 + f(n-1)) + (a2 + f(n-2)) (Addit.-Addit.-Addit.-Gleichung

40. Fall: fn = (a1 x f(n-1)) x (a2 + f(n-2)) (Multipl.-Multipl.-Addit.-Gleichung)

41. Fall: fn = (a1 x f(n-1)) x (a2 - f(n-2)) (Multipl.-Mutipl.-Subtrakt.-Gleichung) (Verhulst-Gleichungen oder logistische Gleichungen)

Die Verknüpfungsformel für zwei Folgeglieder in der superallgemeinen Form:

fn = (a1 verkn. mit f(n-b1)) verkn. mit (a2 verkn. mit f(n-b2))

mit n größer gleich b1 und b2.

Auch für diese Verknüpfungsformel in der superallgemeinen Form gibt es 4x4x4 = 4^3 = 54 mögliche Verknüpfungen der vier Grundrechenarten.

Die Verknüpfungsformel von drei Folgegliedern in der superallgemeinen Form:

fn = (a1 verkn. (n-b1)) verkn. (a2 verkn. f(n-b2)) verkn. (a3 verkn. f(n-b3))

mit n größer gleich b1, b2 und b3.

Abwandlungen

Die durch fo = 0, f1 = 1, f2 = 2, und fn = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) definierte Folge heißt „Tribonacci-Folge".

Die durch fo = 0, f1 = 1, f2 = 2, f3 = 4 und fn = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4) definierte Folge heißt „Quadronacci-Folge".

Teil 2

Lucas-Folgen

Die Lucas-Folgen

Unter der Lucas-Folge (im engeren Sinne) versteht man zunächst die Rekursionsfolge

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

bei der jedes Folgeglied (ab dem dritten) die Summe der beiden vorhergehenden ist.

Es gibt noch eine andere Bedeutung des Begriffs Lucas-Folgen (im weiteren Sinne), die aber in ihrer rekursiven Verknüpfungsvorschrift derart speziell ist, dass sie hier nicht weiter berück-sichtigt werden soll.

Ich möchte nun noch einmal auf die obige Lucas-Folge (im engeren Sinne) eingehen. Diese Lucas-Folge genügt der Rekursionsformel:

fn = f(n-1) + f(n-2)   mit n größer gleicht 2.

Ich möchte nun einmal das Postulat aufstellen, dass jede Folge, die die obige Rekursionsformel erfüllt, Lucas-Folge (im weitesten Sinne) genannt werden soll. Es handelt sich bei obiger Rekursionsformel um die uns bereits bekannte Additionsformel.

Wenn wir dieser Forderung nachgeben, dann ist jede Lukas-Folge so definiert:

fn = f(n-1) + f(n-2)   mit n größer gleicht 2.

Hier nun einige Bespiele für Folgen, die der Additionsformel entsprechen, und daher von mir Lucas-Folgen genannt werden:

1. Beispiel:	**2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...**	**Die Lucas-Folge (im engeren Sinn) (1+3-Folge)**
2. Beispiel:	**0, 1, 1, 2, 3 5, 8, 13, 21, ...**	**Die Fibonacci-Folge (1+1-Folge)**
3. Beispiel:	**2, 0, 2, 2, 4, 6, 10, 16, ...**	**2+2 Folge**
4. Beispiel:	**3, 0, 3, 3, 6, 9, 15, 24, ...**	**3+3-Folge**
5. Beispiel:	**3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, ...**	**1+4-Follge**
6. Beispiel:	**4, 0, 4, 4, 8, 12, 20, 32, ...**	**4+4-Folge**
7. Beispiel:	**4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, ...**	**1+5-Folge**

usw.

Es sollte klar geworden sein, dass ich die Lucas-Folgen nach ihren beiden ersten Summen benenne. Die mit Abstand wichtigsten Lucas-Folgen habe dabei immer folgende Form:
a) 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4, usw. oder
b) 1 + 3, 1 + 4, 1 + 5, 1 + 6, usw

Alle Lucas-Folgen sind durch die beiden ersten Summen (und natürlich auch die beiden ersten Zahlen der Folge) eindeutig bestimmt.

Die Liste der Additionsfolgen
(Lucas-Folgen)

0+0-Folge

Fibonacci-Folge
1+1-Folge

Fibonacci-Folge
1+2-Folge   2+2-Folge

Lucas-Folge
1+3-Folge   2+3-Folge   3+3-Folge

Lucas-Nebenfolge
1+4-Folge   2+4-Folge   3+4-Folge   4+4-Folge

Lucas-Nebenfolge
1+5-Folge   5+5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik" entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- **Hans Kayser/Rudolf Stößel: Kleine Einführung in die Harmonik**
- **Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)**
- **Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese**
- **Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis**

Als Lösung für die Additions-Formel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Additons-Lamdoma Lam(+)

Die Lösungsmenge L für die Additions-Formel ist somit L = Lam(+)

Teil 3

Rekursionsfolgen
Lösungen einfach verknüpfter
Rekursionsgleichungen

Lösungen für die Additionsformel (Lucas-Folgen)

Die Additionsformel: **fn = f(n-1) + (fn-2)** **für n größer gleich 2**

Additionsfolgen mit f0 = 0

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	1	2	3	5	8	Fibonacci-Folge
0	2	2	4	6	10	16	2+2-Folge
0	3	3	6	9	15	24	3+3-Folge
0	4	4	8	12	20	32	4+4 Folge
0	5	5	10	15	25	40	5+5 Folge

Additionsfolgen mit f0 = 1

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
1	0	1	1	2	3	5	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
1	1	2	3	5	8	13	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
1	3	4	7	11	18	29	Lucas-Folge (1+3-Folge)
1	4	5	9	14	23	37	1+4-Folge
1	5	6	11	17	28	45	1+5 Folge

Additionsfolgen mit f0 = 2

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
2	0	2	2	4	6	10	2+2-Folge
2	1	3	4	7	11	18	Lucas-Folge (1+3-Folge)
2	2	4	6	10	16	26	2+2-Folge
2	3	5	8	13	21	34	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
2	4	6	10	16	26	42	2+2 Folge
2	5	7	12	19	31	50	

Additionsfolgen mit f0 = 3

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
3	0	3	3	6	9	15	3+3-Folge
3	1	4	5	9	14	23	1+4 Folge
3	2	5	7	12	19	31	
3	3	6	9	15	24	39	3+3-Folge
3	4	7	11	18	29	47	Lucas-Folge (1+3-Folge)
3	5	8	13	21	34	55	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)

Additionsfolgen mit f0 = 4

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
4	0	4	4	8	12	20	4+4-Folge
4	1	5	6	11	17	28	
4	2	6	8	14	22	36	
4	3	7	10	17	27	44	
4	4	8	12	20	32	52	4+4-Folge
4	5	9	14	23	37	60	

Additionsfolgen mit f0 = 5

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
5	0	5	5	10	15	25	5+5 Folge
5	1	6	7	13	20	33	
5	2	7	9	16	25	41	
5	3	8	11	19	30	49	
5	4	9	13	22	35	57	
5	5	10	15	25	40	65	5+5-Folge
Int:	(1)	(1)	(2)	(3)	(5)	(8)	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)

Wenn man alle logistischen Tabellen aufmerksam studiert und miteinander vergleicht dann sieht man folgende Regelmäßigkeit:
die Intervalle von f0 sind jeweils 0 (letzte Tabelle: 5 + 0 = 5, 5 + 0 = 5, usw.),
die Intervalle von f1 sind jeweils 1 (letzte Tabelle: 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, usw.),
die Intervalle von f2 sind jeweils 1 (letzte Tabelle: 5 + 1 = 6, 6 + 1 = 7, usw.),
die Intervalle von f3 sind jeweils 2,
die Intervalle von f4 sind jeweils 3,
die Intervalle von f5 sind jeweils 5,
die Intervalle von f6 sind jeweils 8,
Dieses entspricht aber wiederum genau der Fibonacci-Folge: 0, 1, 1, 2, 5, 8, 13, 21, usw. Die besondere Bedeutung der Fibonacci-Folge zeigt sich somit auch in den Zahlen selber.
Jede Folge (jede Lösung der Additionsformel) ist linear (harmonisch).
Alle Additionsfolgen sind generell divergent, mit Ausnahme der Nullstellenfolge.

Die Liste der Additionsfolgen als Lösungsmenge der Additionsformel

0+0-Folge

Fibonacci-Folge
1+1-Folge

Fibonacci-Folge
1+2-Folge   2+2-Folge

Lucas-Folge
1+3-Folge   2+3-Folge   3+3-Folge

Lucas-Nebenfolge
1+4-Folge   2+4-Folge   3+4-Folge   4+4-Folge

Lucas-Nebenfolge
1+5-Folge   5+5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- **Hans Kayser/Rudolf Stößel: Kleine Einführung in die Harmonik**
- **Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)**
- **Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese**
- **Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis**

Als Lösung für die Additionsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Additons-Lamdoma Lam(+)

Die Lösungsmenge L für die Additionsformel ist somit L = Lam(+)

Die Lösungsmenge für f2 für die Additionsformel

0+0-Folge
0

Fibonacci-Folge
1+1-Folge
2

Fibonacci-Folge
1+2-Folge **2+2-Folge**
3 **4**

Lucas-Folge
1+3-Folge **2+3-Folge** **3+3-Folge**
4 **5** **6**

Lucas-Nebenfolge
1+4-Folge **2+4-Folge** **3+4-Folge** **4+4-Folge**
5 **6** **7** **8**

Lucas-Nebenfolge
1+5-Folge **5+5-Folge**
6 **10**

Die Lösungsmenge für f3 für die Additionsformel

0+0-Folge
0

Fibonacci-Folge
1+1-Folge
3

Fibonacci-Folge
1+2-Folge **2+2-Folge**
5 **6**

Lucas-Folge
1+3-Folge **2+3-Folge** **3+3-Folge**
7 **8** **9**

Lucas-Nebenfolge
1+4-Folge **2+4-Folge** **3+4-Folge** **4+4-Folge**
9 **10** **11** **12**

Lucas-Nebenfolge
1+5-Folge **5+5-Folge**
11 **15**

Lösungen für die Subtraktionsformel

Die Subtraktionsformel: **fn = f(n-1) - (fn-2)** **für n größer gleich 2**

Subtraktionsfolgen mit f0 = 0

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
0	0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	1	0	-1	-1	0	1	1-1-Folge
0	2	2	0	-2	-2	0	2	
0	3	3	0	-3	-3	0	3	
0	4	4	0	-4	-4	0	4	
0	5	5	0	-5	-5	0	5	

Subtraktionsfolgen mit f0 = 1

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
1	0	-1	-1	0	1	1	0	
1	1	0	-1	-1	0	1	1	1-1-Folge
1	2	1	-1	-2	-1	1	2	2-1-Folge
1	3	2	-1	-3	-2	1	3	
1	4	3	-1	-4	-3	1	4	
1	5	4	-1	-5	-4	1	5	

Subtraktionsfolgen mit f0 = 2

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
2	0	-2	-2	0	2	2	0	
2	1	-1	-2	-1	1	2	1	2-1-Folge
2	2	0	-2	-2	0	2	2	
2	3	1	-2	-3	-1	2	3	
2	4	2	-2	-4	-2	2	4	
2	5	3	-2	-5	-3	2	5	

Subtraktionsfolgen mit f0 = 3

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
3	0	-3	-3	0	3	3	0
3	1	-2	-3	-1	2	3	1
3	2	-1	-3	-2	1	3	2
3	3	0	-3	-3	0	3	3
3	4	1	-3	-4	-1	3	4
3	5	2	-3	-5	-2	3	5

Subtraktionsfolgen mit f0 = 4

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
4	0	-4	-4	0	4	4	0
4	1	-3	-4	-1	3	4	1
4	2	-2	-4	-2	2	4	2
4	3	-1	-4	-3	1	4	3
4	4	0	-4	-4	0	4	4
4	5	1	-4	-5	-1	4	5

Subtraktionsfolgen mit f0 = 5

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
5	0	-5	-5	0	5	5	0	
5	1	-4	-5	-1	4	5	1	
5	2	-3	-5	-2	3	5	2,	
5	3	-2	-5	-3	2	5	3	
5	4	-1	-5	-4	1	5	4	
5	5	0	-5	-5	0	5	5	
Int:	(1)	(1)	(0)	(-1)	(-1)	(0)	1	1-1-Folge

Die Intervalle der Lösungen der Subtraktions-Gleichung entsprechen genau der 1-1-Folge.

Es zeigt sich, dass sich jede Folge (jede Lösung der Subtraktionsformel) im 6. bzw. 7. Folgeglied (f6 bzw. f7) wiederholt.

Jede Folge (jede Lösung der Subtraktionsformel) ist nichtlinear (nichtharmonsich).

Alle Subtraktionsfolgen sind generell divergent mit Ausnahme der Nullstelenfolge.

Die Liste der Subtraktionsfolgen als Lösungsmenge der Subtraktionsformel

0-0-Folge

1-1-Folge

1-2-Folge   2-2-Folge

1-3-Folge   2-3-Folge   3-3-Folge

1-4-Folge   2-4-Folge   3-4-Folge   4-4-Folge

1-5-Folge   5-5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik" entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- **Hans Kayser/Rudolf Stößel: Kleine Einführung in die Harmonik**
- **Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)**
- **Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese**
- **Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis**

Als Lösung für die Subtraktionsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Subtraktions-Lamdoma Lam(-)

Die Lösungsmenge L für die Subtraktionsformel ist somit L = Lam(-)

Die Lösungsmenge für f2 für die Subtraktionsformel

		0-0-Folge 0		
		1-1-Folge 0		
	1-2-Folge -1		2-2-Folge 0	
	1-3-Folge -2	2-3-Folge -1	3-3-Folge 0	
1-4-Folge -3	2-4-Folge -2		3-4-Folge -1	4-4-Folge 0
1-5-Folge -4				5-5-Folge 0

Die Lösungsmenge für f3 für die Subtraktionsformel

		0-0-Folge 0		
		1-1-Folge -1		
	1-2-Folge -2		2-2-Folge -2	
	1-3-Folge -3	2-3-Folge -3	3-3-Folge -3	
1-4-Folge -4	2-4-Folge -4		3-4-Folge -4	4-4-Folge -4
1-5-Folge -5				5-5-Folge -5

Lösungen für die Mutiplikationsformel

Die Multiplikationsformel: **fn = f(n-1) x (fn-2)** **für n größer gleich 2**

Multiplikationsfolgen mit f0 = 0

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	2	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	3	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	4	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	5	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge

Multiplikationsfolgen mit f0 = 1

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
1	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
1	1	1	1	1	1	1	Einerfolge
1	2	2	4	8	32	256	2x2-Folge
1	3	3	9	27	243	...	3x3-Folge
1	4	4	16	64	...		4x4-Folge
1	5	5	25	125	...		5x5-Folge

Multiplikationsfolgen mit f0 = 2

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
2	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
2	1	2	2	4	8	32	2x2-Folge
2	2	4	8	32	256	...	2x2-Folge
2	3	6	18	108	...		2x3-Folge
2	4	8	32	256	...		2x2-Folge
2	5	10	50	500	...		2x5-Folge

Multiplikationsfolgen mit f0 = 3

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
3	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
3	1	3	3	9	27	243	3x3-Folge
3	2	6	12	72	864	...	2x6-Folge
3	3	9	27	243	...		3x3-Folge
3	4	12	48	576	...		
3	5	15	75	645	...		

Multiplikationsfolgen mit f0 = 4

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
4	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
4	1	4	4	16	64	1024	4x4-Folge
4	2	8	16	128	2048	...	
4	3	12	36	432	...		
4	4	16	64	1024	...		4x4-Folge
4	5	20	100	2000	...		

Multiplikationsfolgen mit f0 = 5

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
5	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
5	1	5	5	25	125	3125	5x5-Folge
5	2	10	20	200	4000	...	
5	3	15	45	645	...		
5	4	20	80	1600	...		
5	5	25	125	3125	...		5x5-Folge

Jede Folge (jede als Lösung der Produktformel) ist linear (harmonisch).

Alle Produktfolgen sind generell divergent, mit Ausnahme der Nullstellenfolgen und der Einerfolgen.

Die Liste der Multiplikationsfolgen als Lösungs-menge der Multiplikationsformel

0x0-Folge

1x1-Folge

1x2-Folge   2x2-Folge

1x3-Folge   2x3-Folge   3x3-Folge

1x4-Folge   2x4-Folge   3x4-Folge   4x4-Folge

1x5-Folge   5x5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- **Hans Kayser/Rudolf Stößel: Kleine Einführung in die Harmonik**
- **Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)**
- **Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese**
- **Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis**

Als Lösung für die Multipliationformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Multiplikations-Lamdoma Lam(x)

Die Lösungsmenge L für die Multiplikationsformel ist somit L = Lam(x)

Die Lösungsmenge für f2 für die Multiplikationsformel

0x0-Folge
0

1x1-Folge
1

1x2-Folge **2x2-Folge**
2 **4**

1x3-Folge **2x3-Folge** **3x3-Folge**
3 **6** **9**

1x4-Folge **2x4-Folge** **3x4-Folge** **4x4-Folge**
4 **8** **12** **16**

1x5-Folge **5x5-Folge**
5 **25**

Die Lösungsmenge für f3 für die Multiplikationsformel

0x0-Folge
0

1x1-Folge
1

1x2-Folge **2x2-Folge**
4 **8**

1x3-Folge **2x3-Folge** **3x3-Folge**
9 **18** **27**

1x4-Folge **2x4-Folge** **3x4-Folge** **4x4-Folge**
16 **32** **48** **64**

1x5-Folge **5x5-Folge**
25 **125**

Lösungen für die Divisionsformel

Die Divisionsformel: **fn = f(n-1) / (fn-2)** **für n größer gleich 2**

Divisionsfolgen mit f0 = 0

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
0	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	1	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	2	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	3	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	4	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	5	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert

Divisionsfolgen mit f0 = 1

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
1	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
1	1	1	1	1	1	1	1	Einerfolge
1	2	2	1	1/2	1/2	1	2	
1	3	3	1	1/3	1/3	1	3	
1	4	4	1	1/4	1/4	1	4	
1	5	5	1	1/5	1/5	1	5	

Divisionsfolgen mit f0 = 2

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
2	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
2	1	1/2	1/2	1	2	2	1	
2	2	1	1/2	1/2	1	2	2	
2	3	3/2	1/2	1/3	2/3	2	3	
2	4	4/2	1/2	1/4	2/4	2	4	
2	5	5/2	1/2	1/5	2/5	2	5	

Divisionsfolgen mit f0 = 3

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
3	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
3	1	1/3	1/3	1	3	3	1	
3	2	2/3	1/3	1/2	3/2	3	2	
3	3	1	1/3	1/3	1	3	3	
3	4	4/3	1/3	1/4	3/4	3	4	
3	5	5/3	1/3	1/5	3/5	3	5	

Divisionsfolgen mit f0 = 4

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
4	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
4	1	1/4	1/4	1	4	4	1	
4	2	1/2	1/4	1/2	2	4	2	
4	3	3/4	1/4	1/3	4/3	4	3	
4	4	1	1/4	1/4	1	4	4	
4	5	5/4	1/4	1/5	4/5	4	5	

Divisionsfolgen mit f0 = 5

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
5	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
5	1	1/5	1/5	1	5	5	1	
5	2	2/5	1/5	1/2	5/2	5	2	
5	3	3/5	1/5	1/3	5/3	5	3	
5	4	4/5	1/5	1/4	5/4	5	4	
5	5	1	1/5	1/5	1	5	5	

Für f0 und f1 darf nicht 0 eingesetzt werden, da die Divisionsgleichung sonst nicht definiert ist.
Es zeigt sich, dass sich jede Folge (jede Lösung der Divisionsformel) im 6. bzw. 7. Folgeglied (f6 bzw. f7) wiederholt. Alle Divisionsfolgen sind generell divergent, mit Ausnahme der Nullstellenfolge.

Damit haben wir nachgewiesen, dass praktisch alle Rekursionsfolgen generell divergent sind, mit Ausnahme der Nullstellenfolgen und der Einerfolgen. Jede beliebig Rekursionsformel hat unendlich viele Lösungen, und zwar immer und unweigerlich. Wir können uns leicht davon überzeugen.

Die Liste der Divisionsfolgen als Lösungsmenge der Divisionsformel

0/0-Folge

1/1-Folge

1/2-Folge 2/2-Folge

1/3-Folge 2/3-Folge 3/3-Folge

1/4-Folge 2/4-Folge 3/4-Folge 4/4-Folge

1/5-Folge 5/5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- **Hans Kayser/Rudolf Stößel: Kleine Einführung in die Harmonik**
- **Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)**
- **Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese**
- **Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis**

Als Lösung für die Divisionsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Divisions-Lamdoma Lam(/)

Die Lösungsmenge L für die Divisionsformel ist somit L = Lam(/)

Die Lösungsmenge für f2 für die Divisionsformel

0/0-Folge 0			
1/1-Folge 1			
1/2-Folge 1/2	2/2-Folge 1		
1/3-Folge 1/3	2/3-Folge 2/3	3/3-Folge 1	
1/4-Folge 1/4	2/4-Folge 1/2	3/4-Folge 3/4	4/4-Folge 1
1/5-Folge 1/5			5/5-Folge 1

Die Lösungsmenge für f3 für die Divisionsformel

0/0-Folge 0			
1/1-Folge 1			
1/2-Folge 1/2	2/2-Folge 1/2		
1/3-Folge 1/3	2/3-Folge 1/3	3/3-Folge 1/3	
1/4-Folge 1/4	2/4-Folge 1/4	3/4-Folge 1/4	4/4-Folge 1/4
1/5-Folge 1/5			5/5-Folge 1/5

Die Lösungsmenge für Rekursionsformeln

Gegeben sei die einfache Verknüpfungsformel in der einfachen Form:

fn = f(n-1) verknüpft mit f(n-2)

mit n größer gleich 2.

Lösungsmenge L = Lam(+), Lam(-), Lam(x), Lam(/)

Für diese einfache Verknüpfungsformel gibt es genau vier mögliche Verknüpfungen: Plus (+), Minus (-), Mal (x) und Geteilt durch (/).

1. Fall: Die Additionsformel (Lucas-Folgen):

fn = f(n-1) + f(n-2) mit n größer gleich 2.

Lösungsmenge L = Lam(+)

2. Fall: Die Subtraktionsformel:

fn = f(n-1) - f(n-2) mit n größer gleich 2.

Lösungsmenge L = Lam(-)

3. Fall: Die Multiplikationsformel:

fn = f(n-1) x f(n-2) mit n größer gleich 2

Lösungsmenge L = Lam(x)

4. Fall: Die Divisionsformel:

fn = f(n-1) / f(n-2) mit n größer gleich 2.

Lösungsmenge L = Lam(/)

Dieses sind alle denkbaren Lösungen. Legt man die vier Grundrechenarten zugrunde, dann gibt es nur diese vier Lösungen. In der allgemeinen Schreibweise ergibt sich also für die Lösungsmenge: L = Lam(+), Lam(-), Lam(x), Lam(/)

Das im Rahmen dieser Schrift vorgestellte Lambdoma weicht etwas von dem originalen Lambdoma von Hans Kayser ab. Bei mir wird praktisch nur die eine Hälfte berücksichtigt, und zwar im Sinne des Divisions-Lambdomas Lam(/). Dieses Divisions-Lambdoma stellt denn auch das Lambdoma im engeren Sinne dar, alle vier stellen hingegen das Lambdoma im weitesten Sinne dar.

Teil 4

Pell-Folgen

Die Pell-Folgen

Die Pell-Folgen sind mathematische Folgen von positiven, ganzen Zahlen, die einer bestimmten Art von Rekursionsgleichungen genügen. Die Pell-Folgen sind also rekursiv.

Die Rekursionsgleichung für die Pell-Folgen (im engern Sinne) lautet:

fn = 2 f(n-1) + f(n-2) **mit n größer gleicht 2.**

Die allgemeine Form dieser Art von Rekursionsgleichungen lautet:

fn = a1 f(n-1) + f(n-2) **mit n größer gleich 2 und a1 aus N.**

Wir wollen und nun darauf beschränken, die Pell-Folgen im engeren Sinne zu betrachten.

fn = 2 f(n-1) + f(n-2) **mit n größer gleicht 2.**

Wir müssen nun nur noch die beiden ersten Zahlen festlegen, und wir haben die Pell-Folgen eindeutig definiert. Dabei können f0 und f1 beliebe natürliche Zahlen oder 0 sein. Wir werden später einmal alle denkbaren Lösungen systematisieren. Insgesamt gibt es unendlich viele Lösungen.

John Pell selber interessierte sich für genau zwei Folgen, die durch die folgenden Anfangsbedingungen definiert sind:

1. Pell-Folge: **f0 = 0, f1 = 1** **mit den Zahlen: 0, 1, 2, 6, 12, 29, 70, 169 ...**

2. Pell-Folge: **f0 = 2, f1 = 2** **mit den Zahlen: 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, ...**

Es sind aber tatsächlich beliebig viele weiter Pell-Folgen denkbar. Sehen wir es uns einmal etwas näher an.

Man kann die 1. Pell-Folge auch eine 0.1-Folge nennen, oder eine 1.2-Folge

Weitere wichtige Folgen in dieser Reihe sind die 1.3-Folge und die 1.4-Folge.

Man kann die 2. Pell-Folge auch eine 2.2-Folge nennen.

Weiter wichtige Folgen in dieser Reihe sind die 2.3-Folge

und die 0.2-Folge,die man auch 2.4-Folge nennen kann.

Lösungen für die Pell-Formel

Die (spezielle) Pell-Formel: **fn = 2 f(n-1) + f(n-2)** **für n größer gleich 2**

Pell-Folgen mit f0 = 0

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	2	5	12	29	70	1. Pell-Folge (1.2-Folge)
0	2	4	10	24	58	140	2.4-Folge
0	3	6	15	36	87	210	
0	4	8	20	48	116	280	
0	5	10	25	60	145	350	

Pell-Folgen mit f0 = 1

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
1	0	1	2	5	12	29	1. Pell-Folge (1.2-Folge)
1	1	3	7	17	41	99	1.3-Folge
1	2	5	12	29	70	169	1. Pell-Folge (1.2-Folge)
1	3	7	17	41	99	239	1.3-Folge
1	4	9	22	53	128	309	1.4-Folge
1	5	11	27	65	157	379	

Pell-Folgen mit f0 = 2

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
2	0	2	4	10	24	58	2.4-Folge
2	1	4	9	22	53	128	1.4-Folge
2	2	6	14	34	82	198	2. Pell-Folge (2.2-Folge)
2	3	8	19	46	111	268	2.3-Folge
2	4	10	24	58	140	338	2.4-Folge
2	5	12	29	70	169	408	1. Pell-Folge (1.2-Folge)

Pell-Folgen mit f0 = 3

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6
3	0	3	6	15	36	87
3	1	5	11	27	65	157
3	2	7	16	39	94	227
3	3	9	21	51	123	297
3	4	11	26	63	152	367
3	5	13	31	75	181	737

Pell-Folgen mit f0 = 4

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6
4	0	4	8	20	48	118
4	1	6	13	32	77	188
4	2	8	18	44	106	258
4	3	10	23	56	135	328
4	4	12	28	68	164	398
4	5	14	33	80	193	468

Pell-Folgen mit f0 = 5

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6
5	0	5	10	25	60	145
5	1	7	15	37	89	215
5	2	9	20	49	118	285
5	3	11	25	61	147	355
5	4	13	30	73	176	425
5	5	15	35	85	205	475

Int: (1) (2) (5) (12) (29) (70) 1. Pell-Folge (1.2-Folge)

Die Intervalle der Lösungen dieser speziellen Additions-Gleichung entsprechen genau der 1. Pell-Folge, also der 1.2-Folge.

Die Liste der Pell-Folgen als Lösungsmenge der Pell-Formel

0.0-Folge

3. Pell-F.
1.1-Folge
1.3-Folge

1. Pell-F.	**2. Pell-F.**
1.2-Folge	**2.2-Folge**
2.5-Folge	**2.6-Folge**

3. Pell-F.	**4. Pell-F.**	**5. Pell-F.**
1.3-Folge	**2.3-Folge**	**3.3-Folge**
3.7-Folge	**3.8-Folge**	**3.9-Folge**

6. Pell-F.	**7. Pell-F.**	**8. Pell-F.**	**9. Pell-F**
1.4-Folge	**2.4-Folge**	**3.4-Folge**	**4.4-Folge**
4.9-Folge	**4.10-Folge**	**4.11-Folge**	**4.12-Folge**

1.5-Folge **2.5-Folge**

Auch hier zeigt sich wieder das Lambdoma von Hans Kayser, also das Teilungsverhältnis der Seiten in der Musik. Es sei noch einmal besonders auf die Schriften von Hans Kayser und Julius Schwabe hingewiesen.

Die Lösungsmenge für f2 für die Pell-Formel

0.0-Folge
0
3. Pell-F.
1.1-Folge
1.3-Folge
3

1. Pell-F.	**2. Pell-F.**
1.2-Folge	**2.2-Folge**
2.5-Folge	**2.6-Folge**
5	**6**

1.3-Folge	**2.3-Folge**	**3.3-Folge**
3.7-Folge	**3.8-Folge**	**3.9-Folge**
7	**8**	**9**

1.4-Folge	**2.4-Folge**	**3.4-Folge**	**4.4-Folge**
4.9-Folge	**4.10-Folge**	**4.11-Folge**	**4.12-Folge**
9	**10**	**11**	**12**

1.5-Folge	**2.5-Folge**
11	**15**

Weitere Hinweise:

Man googel vielleicht einmal die folgenden Begriffe, für die sich gute Einträge bei Wiki finden:

- **Lucas-Folge (-Zahlen)**
- **Fibonacci-Folge**
- **Pell-Folge**
- **Rekursion**
- **Differenzengleichung**
- **Lineare Differenzengleichung**
- **Verhulst-Gleichung**
- **Logistische Gleichung**
- **Harmonik**
- **Lambdoma**

Joachim Stiller Münster **Münster, 2010**

Ende

Zurück zur Startseite