Joachim Stiller

Materialien zur Mathematik III

Magische Quadrate

31	30	35	24	25	20	67	72	65
36	32	28	19	23	27	66	68	70
29	34	33	26	21	22	71	64	69
80	75	76	42	37	44	6	7	2
73	77	81	43	41	39	1	5	9
78	79	74	38	45	40	8	3	4
15	16	11	60	55	62	47	54	49
10	14	18	61	59	57	52	50	48
17	12	13	56	63	58	51	46	53

Magische Quadrate

3er-Quadrat 1. Ordnung – Summe: 5 x 3 = 15

Wir füllen zunächst ein Magisches 3er-Quandrat mit den Zahlen 1 – 9 aus. Für Jedes magische Quadrat gibt es genau 8 Lösungen.

2	**9**	**4**
7	**5**	**3**
6	**1**	**8**

3er-Quadrat 2. Ordnung – Summe: 6 x 3 = 18

Nun beginnen wir mit der Zahl 2. So entsteht ein magisches Quadrat 2. Ordnung.

3	**10**	**5**
8	**6**	**4**
7	**2**	**9**

3er-Quadrat 3. Ordnung – Summe: 7 x 3 = 21

4	**11**	**6**
9	**7**	**5**
8	**3**	**10**

4er-Quadrat 1. Ordnung – Summe 34

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

4er-Quadrat 2. Ordnung – Summe: 38

5	15	16	2
10	8	7	13
6	12	11	9
17	3	4	14

5er Quadrat 1. Ordnung – Summe 65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

5er-Quadrat – Summe 70

12	25	8	21	4
5	13	26	9	11
18	6	14	22	17
11	19	2	15	23
24	7	20	3	16

Unechte magische Quadrate I

Die definitiv einfachsten Unechten Quadrate entstehen, wenn man sie mit immer den gleichen Zahlen ausfüllt. Das ist natürlich trivial.

1	**1**	**1**
1	**1**	**1**
1	**1**	**1**

2	**2**	**2**
2	**2**	**2**
2	**2**	**2**

3	**3**	**3**
3	**3**	**3**
3	**3**	**3**

4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4

5	5	5	5	5
5	5	5	5	5
5	5	5	5	5
5	5	5	5	5
5	5	5	5	5

Unechte Magische Quadrate II

Schwieriger wird die Sache schon, wenn man zur Herstellung eines unechten magischen Quadrates mindestens zwei Zahlen mehrfach verwenden soll. Diese Aufgabe ist gar nicht so leicht zu lösen. Am einfachsten geht es mit geraden Quadraten, weil da die Symmetrie praktisch schon vorgegeben ist. Ich habe dafür zwei Verfahren gefunden. Hier das erste Verfahren (Schema):

1	**2**	**1**	**2**
2	**2**	**1**	**1**
1	**1**	**2**	**2**
2	**1**	**2**	**1**

4	**7**	**4**	**7**
7	**7**	**4**	**4**
4	**4**	**7**	**7**
7	**4**	**7**	**4**

Und hier das zweite Verfahren (Schema)

1	**2**	**2**	**1**
2	**1**	**1**	**2**
1	**2**	**2**	**1**
2	**1**	**1**	**2**

4	**7**	**7**	**4**
7	**4**	**4**	**7**
4	**7**	**7**	**4**
7	**4**	**4**	**7**

Dieses Wechselprinzip kann uns auch als Vorlage dienen, um ganz bestimmte ungerade magische Quadrate als unechte Quadrate zu entwickeln. Ich zeige es einmal anhand von 5er-Quadraten. Das geht allerdings nicht mit 3er-Quadraten Für die gibt es keine Lösung. Jedenfalls habe ich keine gefunden. Hier also ein unechtes 5er-Quadrat nach dem ersten Schema:

3	**1**	**2**	**3**	**1**
1	**1**	**2**	**3**	**3**
2	**2**	**2**	**2**	**2**
3	**3**	**2**	**1**	**1**
1	**3**	**2**	**1**	**3**

7	**1**	**4**	**7**	**1**
1	**1**	**4**	**7**	**7**
4	**4**	**4**	**4**	**4**
7	**7**	**4**	**1**	**1**
1	**7**	**4**	**1**	**7**

Hier einmal zwei unechte magische 5er-Quadrate nach dem zweiten Schema:

3	**1**	**2**	**1**	**3**
1	**3**	**2**	**3**	**1**
2	**2**	**2**	**2**	**2**
3	**1**	**2**	**1**	**3**
1	**3**	**2**	**3**	**1**

7	**1**	**4**	**1**	**7**
1	**7**	**4**	**7**	**1**
4	**4**	**4**	**4**	**4**
7	**1**	**4**	**1**	**7**
1	**7**	**4**	**7**	**1**

Und hier ein unechtes 9er-Quadrat nach dem ersten von mir entwickelten Schema. Dabei sind die vier 4er-Quadrate auch wieder magisch…

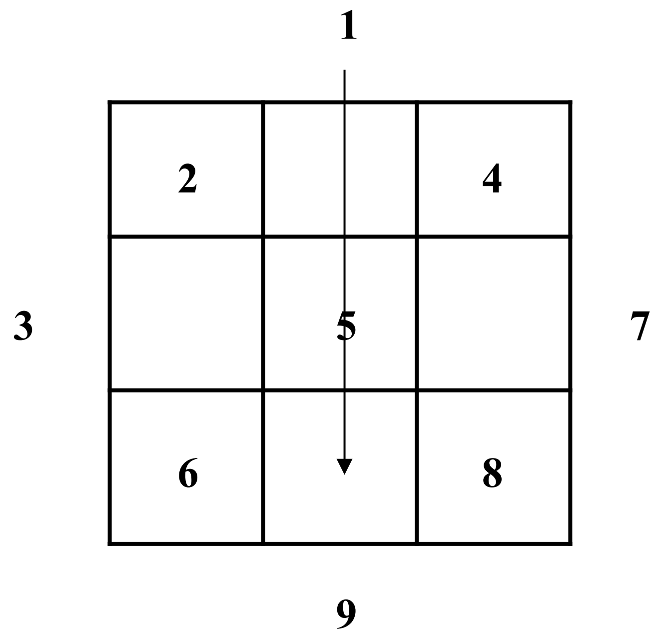
1	7	1	7	4	1	7	1	7
7	7	1	1	4	7	7	1	1
1	1	7	7	4	1	1	7	7
7	1	7	1	4	7	1	7	1
4	4	4	4	4	4	4	4	4
1	7	1	7	4	1	7	1	7
7	7	1	1	4	7	7	1	1
1	1	7	7	4	1	1	7	7
7	1	7	1	4	7	1	7	1

Und hier noch eben ein unechtes 9er-Quadrat nach dem zweiten von mir entwickelten Schema. Dabei sind die vier 4er-Quadrate auch wieder magisch…

1	7	7	1	4	1	7	7	1
7	1	1	7	4	7	1	1	7
1	7	7	1	4	1	7	7	1
7	1	1	7	4	7	1	1	7
4	4	4	4	4	4	4	4	4
1	7	7	1	4	1	7	7	1
7	1	1	7	4	7	1	1	7
1	7	7	1	4	1	7	7	1
7	1	1	7	4	7	1	1	7

Systematisches Konstruktionsschema für Ungerade magische Quadrate

Ungerade magische Quadrate sind besonders leicht zu konstruieren. Man notiert die entsprechenden Zahlen einfach nach dem folgenden Schema über das Magische Quadrat:

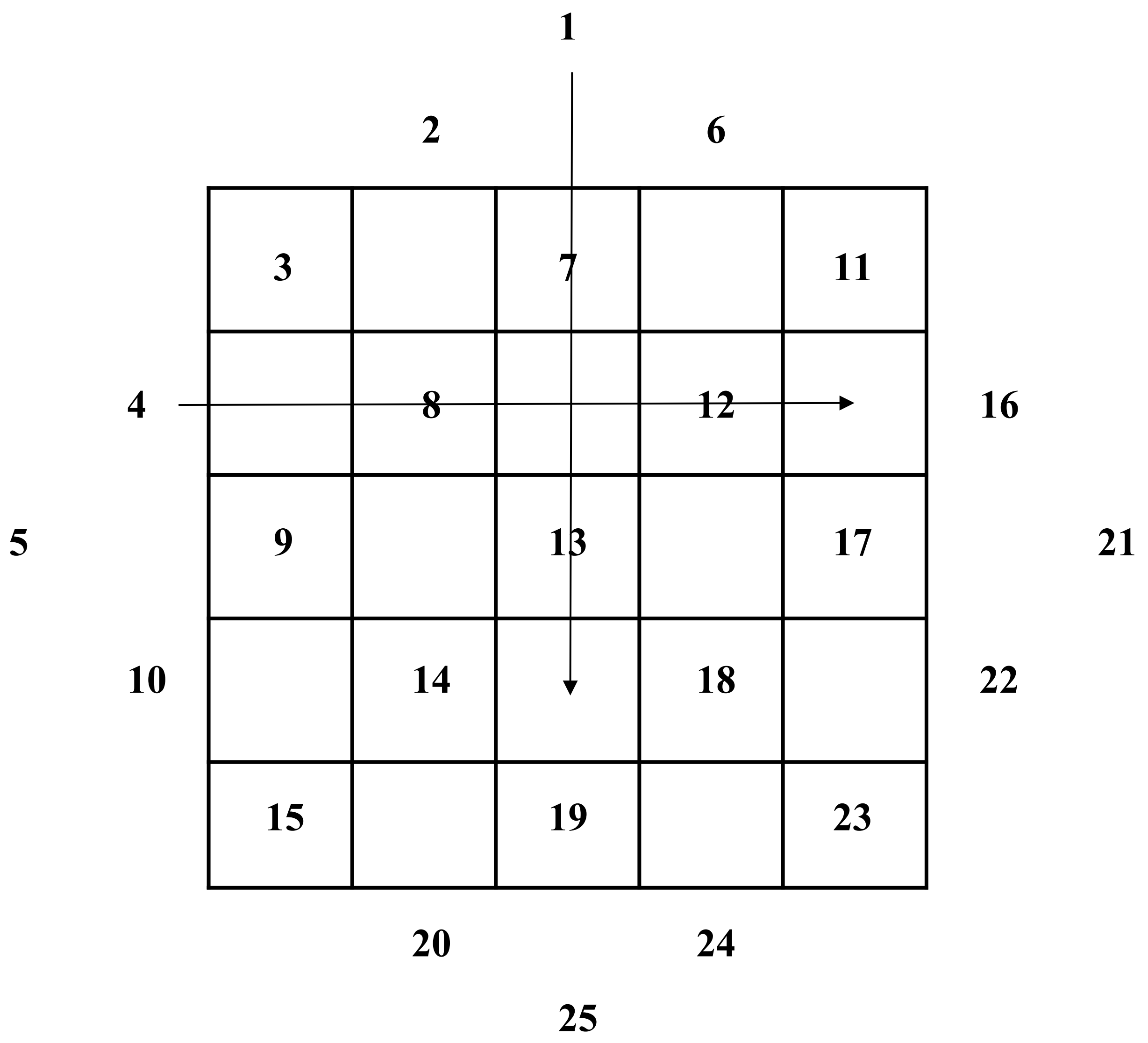


Danach braucht man das ungerade magische Quadrat nur noch komplettieren. Und zwar wie folgt:

2	**9**	**4**
7	**5**	**3**
6	**1**	**8**

Das ganze geht natürlich auch in der genau entgegengesetzten Richtung der Notation. Und wenn man das Quadrat um je 90 Grad dreht, erhält man so genau 8 Möglichkeiten für das magische 3er-Quadrat…

Und hier die Konstruktion für 5er-Quadrate



Hier das fertige Quadrat:

3	**20**	**7**	**24**	**11**
16	**8**	**25**	**12**	**4**
9	**21**	**13**	**5**	**17**
22	**14**	**1**	**18**	**10**
15	**2**	**19**	**6**	**23**

Auch hier kann man die Notation wieder in der genau entgegengesetzten Richtung ansetzen… Man vergleiche einmal mit dem 5er-Quadrat auf Seite 4.

Nach dem hier vorgestellten Schema lässt sich praktisch jedes beliebige ungerade magische Quadrat ohne Probleme konstruieren.

Systematisches Konstruktionsschema für

4er-Quadrate (doppelt gerade)

4er-Quadrate sind wiederum besonders einfach zu konstruieren. Zunächst füllt man dass 4er-Quadrat der Reihe nach aus.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Dann taucht man die auf den diagonalen je gegenüberliegenden Zahlen aus. Wie zeigt die folgende Abbildung. Zum besseren Verständnis wurden die auszutauschenden Zahlen blau dargestellt (es gibt übrigens noch ein weiteres Verfahren dafür):

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Man vergleiche vielleicht einmal mit dem 4er-Quadrat auf Seite 3. ”Einfache” gerade Quadrate sind übrigens erheblich komplizierter zu konstruieren und sollen hier “nicht” besprochen werden.

Das Finale: Das Meisterquadrat

Wir basteln uns nun 9er-Quadrate (81 Felder) aber nicht nach dem Schema aus „Denkspiele der Welt“, sondern nach dem, das ich selber entwickelt habe. Dabei wird das 9er-Quadrat in 9 3er-Quadrate unterteilt, die der Reihe nach in der richtigen Reihenfolge ausgefüllt werden. Es handelt sich somit um eine „selbstähnliche Schachtelung“ des magischen Quadrates. Ich fülle dieses „Meisterquadrat“, wie ich es genannt habe, zunächst nur mit den Ziffern 1 – 9 aus, also im Sinne des Nona-Systems (Zahlensystem mit der Grundzahl 9). Auf diese Weise wird einfach schneller deutlich, was ich meine. Die Besonderheit bei diesem Meisterquadrat ist, dass nicht nur die Summen der Zahlen alle gleich groß sind, sondern ganz logisch auch die Quersummen.

22	29	24	92	99	94	42	49	44
27	25	23	97	95	93	47	45	43
26	21	28	96	91	98	46	41	48
72	79	74	52	59	54	32	39	34
37	35	33	57	55	53	37	35	33
36	31	38	56	51	58	36	31	38
62	69	64	12	19	14	82	89	84
67	65	63	17	15	13	87	85	83
66	61	68	16	11	18	86	81	88

9er-Quadrat 1. Ordnung

Und nun füllen wir das 9er-Quadrat im Sinne des Dezimalsystems aus (Zahlensystem mit der Grundzahl 10). Wir beginnen mit der Zahl 1, so dass ein 9er-Quadrat 1. Ordnung entsteht. Es ist nun lediglich darauf zu achten dass die Reihenfolge beim Ausfüllen der Zahlen genau eingehalten wird. Man schreibe sich dazu vielleicht ein 3-er-Quadrat 1. Ordnung darüber, um sich immer orientieren zu können. Mit ein bisschen Übung bracht man diese Hilfestellung nicht mehr. Dann geht alles ganz automatisch.

11	18	13	74	81	76	29	36	31
16	14	12	79	77	75	34	32	30
15	10	17	78	73	80	33	28	35
56	63	58	38	45	40	20	27	22
61	59	57	43	41	39	25	23	21
60	55	62	42	37	44	24	19	26
47	54	49	2	9	4	65	72	67
52	50	48	7	5	3	70	68	66
51	46	53	6	1	8	69	64	71

9er-Quadrat 11. Ordnung

Nun können wir praktisch jedes beliebige magische 9er-Quadrat jeder beliebigen Ordnung ganz leicht ausfüllen. Hier einmal ein 9er-Quadrat 11. Ordnung. Man muss nur zu jeder Zahl 10 addieren.

21	28	23	84	91	86	39	46	41
26	24	22	89	87	85	44	42	40
25	20	27	88	83	90	43	38	45
66	73	68	48	55	50	30	37	32
71	69	67	53	51	49	35	33	31
70	65	72	52	47	54	34	29	36
57	64	59	12	19	14	75	82	77
62	60	58	17	15	13	80	78	76
61	56	63	16	11	18	79	74	81

Die Siegerehrung: Das Teufelsquadrat

Der Sieger ist das sogenannte Teufelsquadrat: Jedes beliebige 5er-Quadrat darin ist in sich magisch…

1	15	24	8	17	1	15	24	8
23	7	16	5	14	23	7	16	5
20	4	13	22	6	20	4	13	22
12	21	10	19	3	12	21	10	19
9	18	2	11	25	9	18	2	11
1	15	24	8	17	1	15	24	8
23	7	16	5	14	23	7	16	5
20	4	13	22	6	20	4	13	22
12	21	10	19	3	12	21	10	19

Teufelssquadrate sind sehr schwer zu konstruieren. Eine Anleitung soll hier „nicht“ gegeben werden.

Literaturhinweis:

- Van Delft/Botermanns: „Denkspiele der Welt“ (das Kapitel zu den magischen Quadraten)

Ein philosophischer Gedanke

Als „Hobbymathematiker“ möchte ich einmal die These wagen, dass der große Gauß, der ich liebend gerne selber wäre, nie gerechnet hat. Er hat einfach nur die „Strukturen hinter den Zahlen“ verstanden. Und die sind oft verblüffend einfach. Hinter den Zahlen stehen immer die Strukturen der Zahlen. Wer die Strukturen versteht, der braucht eben nicht mehr zu rechnen. Dabei haben die Strukturen und die Zahlen objektiven Charakter. Zahlen sind nämlich nichts Ausgedachtes. Sie sind eine Offenbarung Gottes.

Eine Anekdote

Gauß soll bereits als Schüler seinen Lehrer verblüfft haben, als er die gestellte Aufgabe alle Zahlen von 1 – 100 zusammenzurechnen, bereits nach wenigen Sekunden richtig löste. Was hatte er gemacht? Er rechnete 1 + 99 = 100
2 + 98 = 100
3 + 97 = 100 usw.

Das ergibt 49 x 100 + den ganzen 100er + die in der Mitte übrigbleibende 50, denn beide haben ja ganz logisch kein Gegenstück. Macht zusammen 5050, oder fifty-fifty, wie ich immer zu sagen pflege.

Joachim Stiller — Münster, bis 2014

Ende

Zurück zur Startseite