Joachim Stiller

Materialien zu Mathematik X

Was ist eine Zahl?

Was ist eine Zahl?

In dieser Arbeit soll es einmal um die Frage gehen, was genau eine Zahl ist… Was können, dürfen, sollen wir uns darunter vorstellen? Zunächst versuchen wir, den Begriff Zahl zu definieren.

Die Google-Definition:

Zahl [ist] ein Grundelement der Mathematik, mit dem verschiedene Rechenoperationen ausgeführt werden können.

Das ist natürlich sehr grob... Aber da kann man etwas Wichtiges raus lernen: Definition sind immer mehr oder weniger unscharf... Reicht einem eine grobe Definition nicht aus, muss man sie entsprechend verfeinern... Und wir wollen es natürlich genauer wissen…

Im Brockhaus findet sich diese Definition:

Zahl [ist ein] Grundbegriff der Mathematik zur Bezeichnung der Mächtigkeit einer endlichen Menge (Kardinal-Zahl) oder zur Charakterisierung einer Ordnung innerhalb einer Menge (Ordnungs-Zahl). Ursprünglich beinhalte der Zahl-Begriff nur die zum Zählen geeigneten natürlichen Zahlen N [= 1, 2, 3, 4, 5, 6 usw.]

Diese Definition ist schon etwas besser... Sehen wir gleich einmal im Wörterbuch der Philosophie von Kröner nach (Schischkoff)...

Im Wörterbuch der Philosophie von Schischkoff (Kröner) findet sich das Folgende:

Zahl [ist] die abstrakte, d.h. von jedem besonderen Gehalt absehende Bezeichnung eines Gliedes einer Reihe gleichartiger Elemente, dem je ein bestimmtes anderes Glied vorangeht und folgt. "Das abstrakte individuelle Merkmal, das eine abstrakte Menge von anderen Mengen derselben Art unterscheidet, heißt Zahl." (Schischkoff)

Das ist doch eine sehr schöne und super einfache Definition... Ich liebe Schischkoff einfach... Auch er ist ein großartiger Lehrer...

Die Zahlenmengen

Kommen wir dann zu den Zahlenmengen:

1. Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3 bis Unendlich.... Die Menge der natürlichen Zahlen wird geschrieben mit dem Buchstaben N... Bei N_0 kommt noch die Null mit hinzu. Üblich ist aber die Verwendung von N als mögliche Lösungsmenge... ansonsten weicht man auf die ganzen Zahlen Z aus...

2. Die ganzen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen umfasst, wie der Name schon sagt, alle ganze Zahlen, also von

Minus Unendlich über -2, -1, 0, 1, 2, 3, bis zu Plus Unendlich... Die Menge der ganzen Zahlen wir geschrieben als Z wie Zahl...

3. Die rationalen Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen wird als Menge Q bezeichnet... Sie umfasst alle ganzen Zahlen und außerdem alle Dezimalbrüche... Damit umfasst sie, so meine revolutionäre These, den gesamten Zahlenstrahl von Minus Unendlich bis Plus Unendlich... Denn jede Reelle Zahl lässt sich immer auch als Dezimalbruch darstellen, entweder als endlicher oder unendlicher Längenbruch oder als endlicher oder unendlicher Kettenbruch... Man kann sich das leicht überlegen... Wir haben es bei den Reellen Zahlen mit beliebigen Dezimalbrüchen zu tun.... Aber jeder Dezimalbruch lässt sich als Längenbruch darstellen... Ich brauche die Bruchzahl nur mit einer natürlichen Zahl multiplizieren und sie anschließend wieder durch die natürliche Zahl zu teilen, und kann so den Dezimalbruch immer als Längenbruch darstellen... Das sollte an sich kein Problem sein... Damit umfasst, ich sagte es bereits die Menge der rationalen Zahlen bereits sämtliche Dezimalbrüche und damit den kompletten Zahlenstrahl.... Die von der Menge der Rationalen Zahlen Q unterschiedene Menge der Reellen Zahlen braucht es dann nicht mehr... Sie wird komplett überflüssig...

4. Die reellen Zahlen

Bei den Reellen Zahlen, kur R, handelt es sich um einen historischen Irrtum... Man dachte lange Zeit, die Menge der rationalen Zahlen würde "nicht" sämtliche Dezimalbrüche umfassen und somit auch nicht den kompletten Zahlenstrahl... Das ist, ich hatte es oben erklärt, ein historischer Irrtum, und gehört heute aus der Welt geschafft... Die Menge der Reellen Zahlen ist überflüssig geworden...

5. Die imaginären oder komplexen Zahlen

Die imaginären oder komplexen Zahlen entstehen bei einer Wurzel aus einer negativen Zahl... Diese ist an sich nicht definiert... Ich kann aber einen Platzhalter i dafür einsetzen, für den fall, dass ich es irgendwann wieder Quadriere, und dann erhalte ich wieder die negative Zahl... Das hat den Vorteil, dass man mit der Wurzel aus der negativen Zahl weiterrechnen kann, aus wenn es vorläufig keine Lösung gibt... i steht dabei für Wurzel aus -1... i^2 ist dann ganz logisch -1... Die Irrationalen oder komplexen Zahlen werden mit C bezeichnet... Sie liegen außerhalb des Zahlenstrahls... Daher sprach Gauß auch von der sogenannten "Zahlenebene"!!! und nicht einfach nur vom Zahlenstrahl...

Was ist mit Pi und der eulerschen Zahl?
SokratischerDialog

1. Lassen sich Pi, Phi und Eulersche Zahl als unendliche Kettenbrüche darstellen, und 2. selbst auf die Gefahr hin, dass Du das nicht gelten lässt, macht es keinen Sinn, lediglich für die drei Zahlen Pi, Phi und Eulersche Zahl die Menge der Reellen Zahlen einzuführen... Das wäre zu redundant.... Vielleicht einfach ein Auge zudrücken....

SokratischerDialog, Du hast mich nachdenklich gemacht... Denn genau genommen gibt es beliebig viele unendliche Kettenbrüche... Dann könnte es vielleicht doch Sinn machen, die Menge der Reellen Zahlen R neben der Menge der Rationalen Zahlen Q einzuführen, aber dann bitte nur als um die Menge der unendlichen Kettenbrüche erweiterte Menge... Die Menge der Rationalen Zahlen wäre dann die Menge der (endlichen) natürlichen Brüche und nähert sich dem Unendlichen vom Diesseits her (mit der Ausnahme der periodischen unendlichen Zahlen)... Die Menge der Reellen Zahlen umfasst dann "zusätzlich" die Menge der unendlichen Kettenbrüche... Aber was machen wir mit der Menge der "endlichen" Kettenbrüche... Ordnen wir sie der Menge der Rationalen Zahlen zu oder der Menge der Reellen Zahlen?

Habe mir gerade überlegt, dass endliche Kettenbrüche auch unendliche Dezimalbrüche sind und somit, wie die unendlichen Kettenbrüche gleichermaßen Reelle Zahlen... Die Menge der Reellen Zahlen R ist also die Menge der (endlichen und unendlichen) Kettenbrüche... Aber nun stellt sich für mich eine weiter Frage: Decke ich damit denn schon "alle" Reellen Zahlen ab, oder fehlen mir dann noch Reelle Zahlen? Im Moment weiß ich es nicht... Aber wir sind auch so schon sehr weit gekommen, und würde man allein das schon einmal berücksichtigen, wäre das schon absolut revolutionär... Die Menge der Rationalen Zahlen Q wäre dann die Menge der natürlichen Brüche und die Menge der Reellen Zahlen R wäre dann (mindestens!!!) die Menge der (endlichen und unendlichen) Kettenbrüche...

Noch einmal der Wiki-Artikel:

„Betrachtet man Probleme wie etwa das Finden von Nullstellen von Polynomfunktionen über den rationalen Zahlen, stellt man fest, dass sich in den rationalen Zahlen beliebig gute Näherungen konstruieren lassen: Etwa findet sich bei zahlreichen Polynomfunktionen zu jeder festgelegten Toleranz eine rationale Zahl, sodass der Wert der Polynomfunktion an dieser Stelle höchstens um die Toleranz von der Null abweicht. Zudem kann man die Näherungslösungen so wählen, dass sie „nah beieinander“ liegen, denn Polynomfunktionen sind stetig („weisen keine ‚Sprünge‘ auf“). Dieses Verhalten tritt nicht nur bei Nullstellen von Polynomfunktionen auf, sondern auch bei zahlreichen weiteren mathematischen Problemen, die eine gewisse Stetigkeit aufweisen, sodass man dazu übergeht, die Existenz einer Lösung zu garantieren, sobald beliebig gute Näherungen durch nahe beieinander gelegene rationale Zahlen existieren. Eine solche Lösung nennt man dann eine reelle Zahl. Um die Existenz solcher Lösungen zu zeigen, reicht es zu fordern, dass es zu jeder Menge rationaler Zahlen, die nicht beliebig große Zahlen enthält, unter den reellen Zahlen, die größer oder gleich als all diese Elemente der Menge sind, eine kleinste gibt. Alternativ lassen sich die reellen Zahlen explizit als Folgen von rationalen Zahlen, die sich einander „annähern“, definieren.

Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar. Daher ist es nicht möglich, jede beliebige reelle Zahl sprachlich eindeutig zu beschreiben.

Die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen unter solchen Näherungsprozessen bezeichnet man als Vollständigkeit. Diese erlaubt es, zahlreiche Begriffe aus der Analysis, wie den der Ableitung und den des Integrals, über Grenzwerte zu definieren. Grenzwerte erlauben zudem die Definition zahlreicher wichtiger Funktionen, etwa der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangens etc.), was über den rationalen Zahlen nicht möglich ist.

Die reellen Zahlen behalten maßgebliche Eigenschaften der Addition, Multiplikation und der Ordnung in den rationalen Zahlen und bilden somit ebenfalls einen geordneten Körper. Sie lassen sich nicht erweitern, ohne diese Eigenschaft oder das archimedische Axiom zu verletzen, also „unendlich kleine strikt positive Zahlen“ einzuführen.

Die Idee des Übergangs von den rationalen zu den reellen Zahlen wird durch verschiedene Konzepte der Vervollständigung verallgemeinert.“ (Wiki)

Es geht hier ganz offensichtlich um das Problem der Unendlichkeit Die Rationalen Zahlen scheinen immer nur eine Annäherung an die Reellen Zahlen zu sein... Wie ist das eigentlich genau? Wie verhält sich das? Würde mich sehr interessieren... Im "Unendlichen" decken die Rationalen Zahlen den kompletten Zahlenstrahl ab, doch das Unendliche kann niemals erreicht werden... Das ist das Problem... Stetigkeit oder nicht Stetigkeit, das ist hier die Frage... Man müsste Cantor sein, dann könnte man die Frage sofort beantworten...

Und was in drei Teufels Namen ist überhaupt der Unterschied zwischen Stetigkeit und Kontinuität? Ich glaube, wir müssen hier erst einmal die Begriffe klären, sonst hängen wir hier völlig in der Luft...(Ich habe das alles Mal gelernt und gekonnt, aber da ist leider nichts mehr von übrig...Bin fast 30 Jahre aus der Schule raus...)

Was ist Stetigkeit?

Nicht verzagen, Wiki fragen:

"Die **Stetigkeit (Kontinuität)** ist ein Konzept der Mathematik, das vor allem in den Teilgebieten der Analysis und der Topologie von zentraler Bedeutung ist. Eine Funktion heißt stetig (kontinuierlich), wenn hinreichend kleine Änderungen des Argumentes (der Argumente) zu beliebig kleinen Änderungen des Funktionswertes führen. Eine auf einem topologischen Raum definierte stetige Funktion mit Funktionswerten in einem metrischen Raum zeichnet sich also dadurch aus, dass in keinem ihrer Argumente die Oszillation größer Null ist. Das heißt insbesondere, dass bei stetigen reellen Funktionen keine Sprungstellen auftreten." (Wiki)

Stetigkeit und Kontinuität sind also in der Mathematik das Gleiche... Es sind also Synonyme... Nun können wir also an die obigen Erkenntnis anknüpfen und sagen:

Die Menge aller Rationalen Zahlen Q ist nicht stetig, ist also diskontinuierlich, während die Menge der Reellen Zahlen R stetig bzw. kontinuierlich ist, denn die Rationalen Zahlen nähern sich dem Zahlenstrahl nur beliebig weit an, erreichen ihn aber nie ganz, während die Reellen Zahlen den kompletten Zahlenstrahl vollständig abdecken... Damit haben wir es schon...

Fazit:

Die Unterscheidung zwischen der Menge der Rationalen Zahlen Q und der Menge der Reellen Zahlen R macht also durchaus Sinn...

Es gibt dann noch die Unterscheidung zwischen ganzwertiger Funktion, ganzer Funktion, rationalwertiger Funktion, rationaler Funktion, reellwertiger Funktion reeller Funktion, komplexwertiger Funktion und komplexer Funktion... Aber da bin ich dann mit meinem Latein am Ende...

Joachim Stiller Münster, 2016

Ende

Zurück zur Startseite