Joachim Stiller

Die harmonische Schwingung

Die harmonische Schwingung

Beschreibung von Schwingungen

1. Das Federpendel zeigt, worauf es ankommt

„Eine Kugel hängt an einer Schraubenfeder (Bild 1). Es herrscht Kräftegleichgewicht zwischen Feder- und Gewichtskraft. Bewegen wir sie aus dieser Gleichgewichtslage nach oben, so spüren wir eine Kraft nach unten. Bei einer **Auslenkung s** nach unten eine Kraft nach oben. Im ersten Fall überwiegt die Gewichtskraft, im zweiten die Federkraft. Also würde sich die Kugel in beiden Fällen nach dem Loslassen auf die Gleichgewichtslage zu bewegen. Doch warum bewegt sie sich sogar über diese hinaus und sorgt ohne unser Zutun für eine entsprechende Auslenkung in entgegengesetzter Richtung?

Heben wir die Kugel etwas an und geben sie frei. Sie wird nun durch die nach unten gerichtete Kraft bis zum Erreichen der Gleichgewichtslage ständig beschleunigt. Dort kommt sie aber nicht etwa zur Ruhe. Wegen ihrer Trägheit bewegt sie sich weiter. Die von nun an nach oben wirkende Kraft bremst sie ab, bis sie im unteren Umkehrpunkt für einen Moment ruht. Dann wiederholt sich das Spiel in umgekehrter Richtung.

Am Federpendel können wir typische Merkmale einer Schwingung ablesen: Ein Körper befindet sich in einer stabilen Gleichgewichtslage. Entfernt er sich bei der Schwingung aus ihr, so tritt eine Rückstellkraft auf, die ihn abbremst, zur Umkehr zwingt und ihn wieder zur Gleichgewichtslage hin beschleunigt. Wegen seiner Trägheit bewegt er sich aber über diese Gleichgewichtslage hinaus, und alles beginnt von neuem. Ein solches Spiel zwischen **Rückstellkraft** und **Trägheit** ist charakteristisch für Körper, die nach einer Auslenkung – auch **Elongation** genannt – von selbst schwingen. Solchen Schwingbewegungen begegneten wir bereits in der Akustik. Diesen wesentlich schnelleren Schwingungen konnten unsere Augen nicht mehr folgen. Den Ohren verrieten sie sich aber als Ton.

2. Harmonische Schwingungen

Eine Stimmgabel erzeugt einen Ton. Ihre Zinken zeigen dabei eine besonders gleichmäßige Hin- und Herbewegung. Die aufgezeichnete Schwingbewegung ist aus der Mathematik als Sinuskurve bekannt. Eine Schwingung, deren Zeit-Elongations-Diagramm eine Sinuskurve ergibt, heißt **harmonische Schwingung** oder **Sinusschwingung.**

„Sinustöne" können wir auch mit einem Lautsprecher erzeugen, den wir an einen Sinusgenerator anschließen. Während die Stimmgabel ihren Rhythmus selbst erzeugt, zwingt der Generator die Lautsprechermembran zu harmonischen Schwingungen mit der jeweils eingestellten Frequenz. Man nennt die Schwingung der Stimmgabel deshalb eine **freie Schwingung,** die der Lautsprechermembran eine **erzwungene Schwingung.**

Die Schwingungsbewegung der Stimmgabel klingt allmählich ab. Die anfangs in sie hineingesteckte Energie wird durch Reibung und Abgabe von Schall aus dem System herausgeführt. Die Schwingung ist „gedämpft". Je schneller sie abklingt, desto stärker ist die Dämpfung. Ohne Energieverluste würde die Schwingung endlos dauern. Diesen (nie ganz zu verwirklichenden) Idealfall nennt man eine **freie ungedämpfte mechanische Schwingung.**

Ein Pendelkörper schwingt frei und nahezu ungedämpft. Wir zeichnen sein Zeit-Elongations-Diagramm auf Wir sehen eine Sinuskurve. Die Bewegung eines Körpers hängt davon ab, welche Kraft in der jeweils eingenommenen Position auf ihn wirkt. Wie groß ist also bei einer Auslenkung s des Federpendels die zugehörige Rückstellkraft F?

3. Welches Kraftgesetz sorgt für harmonische Schwingungen?

Man beachte die Momentbilder der Schwingung. Da die Kräfte und Auslenkungen auf einer Linie liegen, können wir sie durch Worte mit Vorzeichen beschreiben. Wir wählen sie nach oben positiv und nach unten negativ.

a) In der Gleichgewichtslage hebt die nach oben gerichtete (positive) Zugkraft F_0 der Feder die nach unten gerichtete (negative)Gewichtskraft G gerade auf. Es gilt $G = -F_0$. Also ist die Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = G + F_0 = \mathbf{O}$$

b) Nun wird der Körper um die Strecke s > o nach oben ausgelenkt. Dann verkleinert sich die nach oben wirkende Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - Ds$. Die Gewichtskraft überwiegt. Es ergibt sich nach unten die resultierende Kraft:

$$F = G + F_1 = G + F_0 - Ds = o - Ds$$

$$\mathbf{F = -Ds < 0}$$

c) Lenkt man den Körper um die Strecke s < 0 nach unten aus, so vergrößert sich die nach oben wirkende Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - Ds$. Beachten Sie, dass hier s ngeativ, sole –Ds positiv ist. Jetzt überwiegt die Federkraft. Die Resultierende Kraft nach oben ist:

$$F = G + F_1 = G + F_0 - Ds = o - Ds$$

$$\mathbf{F = -Ds > 0}$$

Die Rückstellkraft F ist also proportional zur Auslenkung s. Es gilt das **Elongations-Kraft-Gesetz F = -Ds** mit der *Federhärte* D, die stets positiv ist. Das Minus-Zeichen besagt, dass F immer in die entgegengesetzte Richtung von s – also zur Gleichgewichtslage hin – zeigt.“ (Aus: Dorn Bader: Physik Gymnasium Sek II – 12/13, S98-99. Man vergleich auch mit S.100-107.)

Federpendel und Horizontalschwinger

1. Das Fadenpendel

„Schwingt der an einem Faden aufgehängte Pendelkörper in Bild 2 harmonisch? Dazu prüfen wir, ob das lineare Kraftgesetz gilt:
Die Auslenkung s aus der Gleichgewichtslage erfolgt längs des Kreisbogens mit dem Radius l und der Länge s = l δ (δ im Bogenmaß). Die Rückstellkraft F finden wir, wenn wir die auf den Pendelkörper der Masse m wirkende Gewichtskraft G = m g durch die Komponenten F und F_l ersetzen. Da F_l (in Richtung des Fadens) immer senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, ist F die hier allein interessierende Kraft. F zeigt als Rückstellkraft stets tangential zum Kreisbogen zur Gleichgewichtslage hin. Da die Rückstellkraft ihre Richtung entlang des Bogens ändert, betrachten wir im Folgenden nur ihre Betrag.
Die Schwingung ist nur dann harmonisch, wenn F proportional zur Auslenkung s ist. – Nun liefert das Kräfteparallelogramm:

$$F = m\ g \sin \delta = m\ g \sin (s/l).$$

Wenn s << l gilt, so ist s näherungsweise gleich der horizontalen Auslenkung s_l und es gilt $\sin \delta = s_h / l \approx s/l$. Das lineare Kraftgesetz für kleine Elongationen s lautet dann als Betragsgleichung;

$$F = (m\ g/l)s.$$

Wir können demnach das Fadenpendel mit jeder gewünschten Genauigkeit als harmonischen Schwinger der Richtgröße D = m g/l betrachten, wenn wir nur die Amplitude hinreichend klein wählen. Mit T = 2π Wurzel aus (m/D) folgt dann für die Periodendauer:

T = 2π Wurzel aus (m/D) = 2π Wurzel aus (m l/m g) = 2π Wurzel aus (l/g).

T hängt nur von der Pendellänge l und der Fallbeschleunigung g ab.
Bei kleiner Amplitude ist die Schwingungsdauer eines 2 m langen Pendels
T = 2π Wurzel aus (2m/9,81 ms^-2) = 2,84 s.

Ein **Fadenpendel** schwingt bei hinreichend kleiner Amplitude harmonisch. Seine **Periodendauer** ist dann

(1) T = 2π Wurzel aus (l/g).

Durch genaue Messung von Periodendauer T und Pendellänge l kann man mit Gleichung (1) die Fallbeschleunigung g am Ort des Versuchs bestimmen. Im Mittel nimmt die Fallbeschleunigung an der Eroberfläche vom Äquator zu den Polen wegen der Form und Drehung der Erde kontinuierlich zu. Der unterschiedliche Aufbaue der Erdkruste verändert die Fallbeschleunigung zusätzlich. Über Erzlagerstätten ist die Fallbeschleunigung vergrößert, über Salzlagern und Erdölvorkommen verkleinert. Die Einflüsse von Sonne und Mond verändern g um maximal +- 1,5 * 10^-6 m/s^2 am Tag.

2. Der horizontale Federschwinger

In Bild 3 ist ein Experimentierwagen zwischen zwei Federn mit den Richtgrößen D_1 und D_2 gespannt. Diese erzeugen eine zur Auslenkung s proportionale Rückstellkraft F. Es gilt als $F = -Ds$, wobei D die Richtgröße des aus beiden Federn bestehenden Systems ist. Bei fehlender Reibung schwingt der Wagen also harmonisch mit der Periodendauer
$T = 2\pi$ Wurzel aus (m/D) hin und her.

Wir leiten $F = -Ds$ für beliebige Federhärten D_1 und D_2 her: Die Vektoren für die Federkräfte und Elongationen liegen auf einer Geraden. Wir beschreiben sie deshalb durch Werte mit Vorzeichen (nach rechts positiv, nach links negativ). Befindet sich der Wagen im Nullpunkt $s = 0$, so zieht an ihm die rechte Feder mit der Kraft $F_1 > 0$ nach rechts, die linke Feder mit $F_2 < 0$ nach links. Da in diesem Punkt Kräftegleichgewicht herrscht, gilt $F_1 = -F_2$ und daher $F_1 + F_2 = 0$ (Bild 2a). Zieht die rechte Feder z.B. mit $F_1 = + 3$ N nach rechts, dann murr die linke Feder mit $F_2 = - 3$ N nach links ziehen.
Bei der Elongation $s > 0$ zieht die rechte Feder 1 mut D_1 s (Bild 2b). Die resultierende Rückstellkraft beträgt dann

$F = F^*_1 + F^*_2 = F_1 + F_2 – D_1 s – D_2 s$.

Da $F_1 + F_2 = 0$ ist, folgt $F = - (D_1 + D_2) s$.

Für eine Elongation $s < 0$ liefert eine entsprechende Überlegung dasselbe Ergebnis. Die Summe $D_1 + D_2 = D > 0$ ist die Richtgröße der aus beiden Federn bestehenden Spannvorrichtung.

Für einen zwischen zwei elastischen Federn gespannten Wagen gilt das Weg-Kraft-Gesetz

$F = -Ds$ mit $D = D_1 + D_2$.

Die Richtgröße D des Federsystems ist gleich der Summe der Federhärten der auf beiden Seiten ziehenden Federn. Bei fehlender Reibung schwingt der Wagen harmonisch mit der Schwingungsdauer.“

$T = 2\pi$ Wurzel aus (m/D).

Auszug aus Dorn Bader: Physik für Oberstufe – Band MS

Joachim Stiller Münster, 2013

Ende

Zurück zur Startseite