Joachim Stiller

Formelsammlung Astronomie

Formelsammlung Astronomie

In diesem Thread möchte ich einmal eine Formelsammlung zur Astronomie für die Galerie vorinstallieren... Zunächst einige wichtige Entfernungseinheiten:

Entfernungseinheiten

Astronomische Einheit................1 au..........= 149,6 * 10^6 km

Lichtjahr.....................................1 Ly..........= 63240 au = 9,46 * 10^12 km

Parsec.......................................1 pc..........= 3,26 Ly

Kiloparsec..................................1 kpc.........= 1000 pc = 3260 Ly

Megaparsec................................1 Mpc........= 1000 kpc = 3,26 * 10^6 Ly

Konstanten

Lichtgeschwindigkeit....................c...............= 2,99798 * 10^6 km / s

Gravitationskonstante.................G..............= 6,670 * 10^-11 m³ / (kg * s²)

Bolzmannkonstante.....................k...............= 1,38 * 10^-23 Nm / K

Sonnenmasse.............................Ms............= 1,989 * 10^30 Kg

Sonnenradius.............................Rs............= 6,960 * 10^8 m

Erstes Keplersches Gesetz

Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Zweites Keplersches Gesetz

Die Verbindungslinie Sonne - Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).

Drittes Keplersches Gesetz

Dei Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritte Potenz der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Gegeben seien zwei Planeten mit den Umlaufzeiten U_1 und U_2. Dann gilt:

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

wobei a die große Halbachse der Ellipse ist.

Es gilt:

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Form:

$$\frac{a_1^3}{U_1^2} = \frac{a_2^3}{U_2^2} = C = const.$$

und beachtet, dass die Ziffern 1 und 2 für beliebige Planeten stehen, so sieht man, dass für jeden einzelnen Planeten gilt:

$$\frac{a^3}{U^2} = C$$

wobei C demnach eine für das gesamte Planetensystem gültige Konstante sein muss.

Dabei ist

$$C = 3,36 \cdot 10^{18} \cdot \frac{m^3}{s^2}$$

Das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

Ein Körper der Masse m befindet sich in der Entfernung r von einem Körper der Masse M. Welche Beschleunigung erfährt ein Körper m infolge der Gravitationskraft zwischen m und M?

$$F = m \cdot \frac{G \cdot M}{r^2}$$

mit:

$$F = m \cdot a$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{G \cdot M}{r^2}$$

oder:

$$g = \frac{G \cdot M}{r^2}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Beschleunigung, die ein Körper mit der Masse m im Gravitationsfeld einer Masse M erfährt, unabhängig von seiner eigenen Masse m ist.

Herleitung des Newtonschen Gravitations-Bewegungsgesetzes

$$E_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2} \cdot E_{\mathrm{pot}}$$

mit:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

und:

$$E_{\mathrm{pot}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Und jetzt wird auch ein Schuh aus dem Ganzen! Die beiden Energien sind bei unserem Beispiel ja beide konstant, also kann man das mit dem Mittelwert weg lassen.

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{\mathrm{pot}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r}$$

$$v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

oder:

$$M = \frac{r \cdot v^2}{G}$$

Viel einfacher macht man es aber in diesem Fall doch, wenn man sagt: Die Gravitationskraft ist hier gerade die Zentripetalkraft der kreisförmigen Bewegung:

$$F_{\mathrm{Zf}} = F_{\mathrm{G}}$$

mit:

$$F_{\mathrm{Zf}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

und:

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

Daraus folgt:

$$F_{Zf} = \frac{m \cdot v^2}{r} = F_G = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

oder:

$$M = \frac{r \cdot v^2}{G}$$

Den Virialsatz lernt man normalerweise eher nicht in der Schule, die Zentripetalkraft aber schon. Mit dem Virialsatz kann man dafür noch viele andere schöne Dinge tun, die aber hier nicht gebraucht werden...

Verschiedene Interpretationen des Newtonschen Gravitations-Bewegungs-Gesetzes

Hier noch einmal das nach v umgeformte Gesetz:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Wovon hängt die Virialgeschwindigkeit nun ab? Die Virialgeschwindigkeit v hängt von zwei Variablen ab, nämlich M und r.

Beim Sonnensystem

Beim Sonnensystem ist die Masse M konstant und hängt nicht vom Radius ab. Die Virialgeschwindigkeit v hängt dann nur vom Radius r ab. Die Virialgeschwindigkeit $v(r)$ ist proportional $\sqrt{1/r}$.

$v(r)$ proportional $\sqrt{1/r}$.

Bei der Milchstraße

Bei der Milchstraße hingegen ist die Masse M "nicht" konstant; sie hängt sowohl von der Virialgeschwindigkeit v ab, als auch vom Radius r. Da die Virialgeschwindigkeit in Spiralgalaxien aber konstant ist (v = konstant) ist die Virialmasse M(r) proportional r.

M(r) proportional r.

Masse der Sonne berechnen

Die Virialmasse (M) der Sonne berechnet sich mit dem Newtonschen Gravitations-Bewegungs-Gesetz, und zwar wie folgt:

$$M = \frac{r \cdot v^2}{G}$$

mit:

$$v = \frac{s}{t}$$

und für den Kreisumfang:

$$s = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Daraus folgt:

$$M = \frac{r \cdot (2 \cdot \pi \cdot r)^2}{G \cdot t^2}$$

oder:

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot t^2}$$

Erkennt Ihr das 3. Keplersche Gesetz darin? Wir scheinen es also richtig gemacht zu haben. Wenn wir nun r durch die große Halbachse der Ellipse ersetzen, erhalten wir:

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot t^2}$$

Das 3. Keplersche Gesetz (Näherung)

Und nun erhalten wir eine Näherung für das 3. Keplersche Gesetz:

$$C = \frac{a^3}{U^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2}$$

Das 3. Keplersche Gesetz für das Sonnensystem

Das 3. Keplersche Gesetz sieht dann für das Sonnensystem ganz genau "so" aus:

$$C = \frac{a^3}{U^2} = \frac{G \cdot (M_\mathrm{S} + M_\mathrm{P})}{4 \cdot \pi^2}$$

Vielleicht wäre es besser gewesen, Kepler hätte den (mittleren) Bahnradius wie folgt bestimmt: die große Halbachse a und die kleine Halbachse b addieren und die Summe durch 2 teilen. Man müsste sich mal überlegen, ob man das nicht korrigiert...

Also, mittlerer Bahnradius r(mittel) = (a + b) / 2 = (a + ae) / 2

Dabei ist:

Größter Radius: a + b = a + ae

Kleinster Radius: a - b = a - ae

Literaturhinweis:

- H.R. Henkel: Astronomie - Ein Grundkurs für Schulen, Volkshochschulen und zum Selbststudium

$$C = \frac{a^3}{U^2} = \frac{G \cdot (M_S + M_P)}{4 \cdot \pi^2}$$

Diese Gleichung soll nun auf zwei Massen M1 und M2 angewendet werden. Es gelten:

$$C = \frac{a_1^3}{U_1^2} = \frac{G \cdot (M_S + M_1)}{4 \cdot \pi^2}$$

und:

$$C = \frac{a_2^3}{U_2^2} = \frac{G \cdot (M_S + M_2)}{4 \cdot \pi^2}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun "so" umformen:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{U_1^2 \cdot (M_S + M_1)}{U_2^2 \cdot (M_S + M_2)}$$

Diese Gleichung gestattet es, die Masse eines der beteiligten Körper zu bestimmen, falls die übrigen Daten bekannt sind.

Hubarbeit

Bestimmen wir die Hubarbeit, wenn ein Gewicht von 2 kg 15 m angehoben wird.

$$\Delta W = F \cdot \Delta r$$

$$\Delta W = F_G \cdot \Delta r$$

Außerdem gilt:

$$F_G = M_2 \cdot a$$

oder:

$$F_G = M_2 \cdot g$$

Daraus folgt:

$$\Delta W = M_2 \cdot g \cdot \Delta r$$

$$\Delta W = 2kg \cdot 9,81m/s^2 \cdot 15m$$

$$\Delta W = 294,3Nm$$

Exkurs: Zur Geometrie der Ellipse

Man sehe sich zunächst das angehängte Schaubild an...

Astronomisch messen wir genau zwei Werte, den Aphel und den Perihel... Diese werden rein empirisch bestimmt, als durch genaue Messung. folgende Überlegung:

Aphel = a + ae

Perihel = e (so will ich diese Strecke einmal nennen.... Bisher wurde ae immer e genannt... Ich halte das für ungünstig)

These: Der mittlere Radius $\overline{r}$ist nun gleich der großen Halbachse a.

Beweis 1:

Der Mittlere Radius $\overline{r}$= (Aphel + Perihel) / 2 = (a + ae + e) / 2 = a, denn ae + e = a... q.e.d.

Beweis 2:

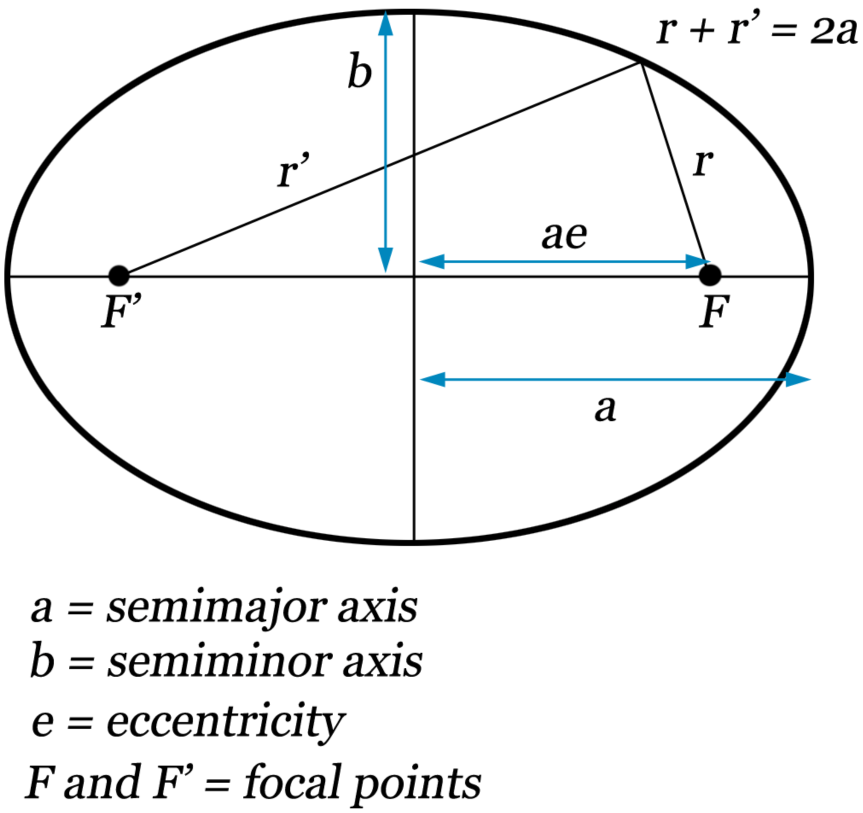
r + r' = konstant, denn so ist die Ellipse definiert...

r + r' = a + ae + e für den Fall, dass gerade der Aphel oder der Perihel erreicht ist...

Daraus folgt, dass $\overline{r}$= a, denn ae + e = a... q.e.d.

Wir haben also nun drei Parameter genau bestimmt, den Aphel, den Perihel und den mittleren Radius $\overline{r}$. Letzterer entspricht genau der großen Halbachse a. Wir sind also insgesamt ganz ohne die kleine Halbachse b ausgekommen, und können trotzdem alle Berechnungen durchführen...

Der Fehler, der oft gemacht wird, ist anzunehmen, dass die große Halbachse a der Aphel sei... Das ist aber nicht der Fall... Ich selbst habe diesen Fehler auch lange gemacht...



Die Bahngeschwindigkeit v(r) auf der Ellipse

Für die jeweilige Bahngeschwindigkeit v(r) von Masse M2 auf einer elliptischen Bahn um die Masse M1 ergibt sich:

$$v\left(r\right) = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_1 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2 \cdot a}\right)}$$

Noch genauer:

$$v\left(r\right) = \sqrt{2 \cdot G \cdot \left(M_1 + M_2\right) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2 \cdot a}\right)}$$

Die Gesamtenergie eines Planeten

Die Gesamtenergie eines Planeten bestimmt sich als:

$$W_{ges} = W_{kin}\left(r\right) + W_{pot}\left(r\right)$$

mit:

$$W_{kin}\left(r\right) = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot v^2$$

und:

$$W_{pot}(r) = -G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r}$$

Ohne dass wir dies beweisen, sei folgender wichtige Satz genannt:

In jedem Punkt der Bahn eines Planeten ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant:

$$W_{ges} = W_{kin}(r) + W_{pot}(r) = Const.$$

Und ohne dass wir es jetzt ausführlich herleiten, denn die Herleitungen ist doch recht kompliziert, erhalten wir:

$$W_{ges} = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot v(r)^2 - G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r}$$

Außerdem:

$$W_{ges} = -G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{2 \cdot a}$$

Es ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot v(r)^2 - G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r} = -G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{2 \cdot a}$$

Durch Auflösen nach der Bahngeschwindigkeit $v(r)$des Planeten der Masse M_2. die die Zentralmasse M_1auf einer elliptischen Bahn umläuft, erhalten wir:

$$v(r) = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_1 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2 \cdot a}\right)}$$

Eine noch allgemeinere Herleitung führt auf:

$$v(r) = \sqrt{2 \cdot G \cdot (M_1 + M_2) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2 \cdot a}\right)}$$

Und eben das war das gesuchte Ergebnis aus Beitrag 12...

Druck und Temperatur im Inneren der Sonne

Bezeichnen wir mit Ndie Zahl der Teilchen pro Kilomol $(6,022 \cdot 10^{26})$, mit Tdie Temperatur, mit Vdas Volumen und mit Pden Druck, so gilt für ideale Gase:

$$P \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

wobei k die Bolzmannkonstante ist:

$k = 1,38 \cdot 10^{23} Nm/K$

Für einen stabilen Zustand im Stern muss an jeder Stelle gelten:

$F_{\text{Grav}} = F_{\text{Gasdruck}}$

bzw.

$P_{\text{Grav}} = P_{\text{Gasdruck}}$

Zur Abschätzung des Drucks im Sonneninneren zerlegen wir die Sonne in zwei Habkugeln. Beide Halbkugeln üben Gravitationskräfte aufeinander aus. Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Dichte der Sonne von $1,4 g/cm^3$ gelte überall, d.h. die Sonne würde eine homogene Dichte besitzen. Der Masseschwerpunkt S jeder Halbkugel hat vom Sonnenzentrum eine Entfernung von $r = 0,375 Rs$. Nun können wir die gegenseitige Gravitationskraft der beiden Halbkugeln berechnen:

$$F_{\text{G}} = G \frac{Ms^2}{4 \cdot (o,75 \cdot Rs)^2}$$

Diese Kraft übt nun auf jede der beiden Schnittflächen einen Druck P aus, der sich auch als mittlerer Druck $\overline{P}s$ im Sonneninneren interpretieren lässt:

$$\overline{P}s = \frac{F_{\text{G}}}{\pi \cdot Rs^2}$$

$$\overline{P}s = \frac{G \cdot Ms^2}{4 \cdot \pi \cdot 0,75^2 \cdot Rs^4}$$

$$\overline{P}s = \frac{G \cdot Ms^2}{7,068 \cdot Rs^4}$$

$$\overline{P}s = 1,6 \cdot 10^{14} Pa$$

Nachdem wir den mittleren Druck im Inneren der Sonne zu rund $1,6 \cdot 10^{14} Pa$ abgeschätzt haben, können wir die mittlere Sonnentemperatur Ts bestimmen:

$$\overline{P}s \cdot Vs = N \cdot k \cdot \overline{T}s$$

oder:

$$\overline{T}s = \frac{Ps \cdot Vs}{N \cdot k}$$

mit:

$$\overline{m} \cdot N = Ms$$

oder:

$$N = \frac{Ms}{\overline{m}}$$

Nach Einsetzen erhalten wir:

$$\overline{T}s = \frac{\overline{P}s \cdot Vs \cdot \overline{m}}{Ms \cdot k}$$

mit:

$$Vs = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot Rs^3$$

Dann ergibt sich:

$$\overline{T}s = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\overline{P}s \cdot Rs^3 \cdot \overline{m}}{Ms \cdot k}$$

$$\overline{T}s = 6,8 \cdot 10^6 K$$

Flächendichten von Spiralgalaxien

Für die Gesamtmasse von Spiralgalaxien ergibt sich bekanntlich:

$$M_{(r)} = \left(r \cdot v^2\right) / G$$

Dabei ist das gemessene $v = \text{konstant}$... M hängt also nur vom Radius r ab...

Für die Kreisfläche ergibt sich:

$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2$$

Damit sollten wir das Problem lösen können:

(1)

$$\rho_{(r)} = dM/dA$$

$$\rho_{(r)} = d\left(v^2 \cdot r/G\right) / d\left(\pi \cdot r^2\right)$$

$$\rho_{(r)} = \left(v^2/G\right) / (\pi \cdot 2r)$$

$$\rho_{(r)} = v^2 / (2\pi \cdot G \cdot r)$$

Ich kann es spaßeshalber auch geometrisch herleiten, und nicht nur differentialrechnerisch:

(2)

$$\rho_{(r)} = (M_{(R)}/R) \cdot (1/2\pi r)$$

$$\rho_{(r)} = (v^2 R/GR) \cdot (1/2\pi r)$$

$$\rho_{(r)} = (v^2/G) \cdot (1/2\pi r)$$

$$\rho_{(r)} = v^2/(2\pi \cdot G \cdot r)$$

Kosmologie - Der Hubble-Parameter

$$v = H \cdot r$$

oder:

$$H = \frac{v}{r}$$

Für H wird heute zumeist 70 km / (s Mpc) angenommen. Es handelt sich bei der Größe H allerdings nur um einen Parameter, der von v und von r abhängt... Außerdem muss berücksichtigt werden, dass das Weltall in der Vergangenheit noch nicht so weit ausgebreitet war... Dadurch werden die Radien aber kleiner, so dass der Hubbelparameter für große Entfernungen, also in der Vergangenheit, eigentlich größer werden müsste... Tut er aber nicht... H bleibt bei ziemlich einheitlichen 70 km / (s Mpc)... Das könnte den Effekt der Beschleunigung der Expansion um ein Vielfaches vergrößern...

Gravitationslinsen und Lichtablenkung im Schwerefeld

$$\alpha = \frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot R} = 2 \cdot \frac{R_s}{R}$$

Der Schwarzschildradius von Schwarzen Löchern

$$R_s = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$$

Literaturhinweise:

dtv ist für seine guten Glossars bekannt... Empfehlen möchte ich folgendes Werk mit einem wirklich tollen mathematischen Anhangsteil mit Formelsammlung:

- Steven Weinberg: Die ersten drei Minuten - Der Ursprung des Universums (dtv), S.175-187

außerdem:

- dtv-Atlas zur Astronomie

- H. R. Henkel: Astronomie - Ein Grundkurs für Schulen, Volkshochschulen und zum Selbststudium

- Humboldt-Astronomie-Lexikon

Joachim Stiller Münster, 2015

Ende

Zurück zur Startseite