Joachim Stiller

Zoglauer: Einführung in die formale Logik

Eine Besprechung

Zoglauer: Einführung in die formale Logik

Hier soll einmal das Werk "Einführung in die formale Logik für Philosophen" von Thomas Zoglauer gelesen und besprochen werden... Wenn Ihr Euch das Werk besorgen wollt, dann tut das... Die Anschaffung lohnt sich...

Da ich nur eine Kopie habe, fehlt mir der Text auf dem Buchrücken... Dafür hier noch eben die (gekürzte) Inhaltsangabe:

Wie schon bei Detel werden ich auch hier das 1. Kapitel überspringen... Wir wollen zunächst die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik vertiefen um dann zum eigentlichen Ziel der Lektüre zu kommen, der Modallogik, die in diesem Werk so gut behandelt ist, wie in keinem anderen... Ich bin dringend auf ein tieferes Verständnis der Modallogik angewiesen...

2. Aussagenlogische Verknüpfungen

Junktoren

Hier die Junktoren, die wie verwenden werden... Es sind zugleich die wichtigsten...

(1) Junktoren, die vor oder zwischen Aussagen oder Aussageformen stehen:
....(a) ¬: nicht (Negation),
....(b) Λ: und (oder: and) (Konjunktion),
....(c) V: oder (auch) (Disjunktion),
....(d) → (oder: ⇒): wenn, dann ((materiale) Implikation),
....(e) ← (oder: ⇐): nur wenn, dann ((materiale) Replikation),
....(f) ↔ (oder: ⇔): genau dann, wenn (Äquivalenz),
....(g) >-<: entweder, oder (Kontravalenz),
....(h) |: weder, noch (Exklusion).

Junktoren und Quantoren heißen auch logische Konstanten. Insgesamt gibt es neben der Negation genau 16 denkbare Junktoren... Ich werde noch einmal darauf zurückkommen...

Negation

Die Aussage p: 7 < 5 ist falsch. Daher ist die Negation ¬p: 7 > 5 wahr. Schematisch sieht das "so" aus:

p.........¬p

W.........f
f...........w

Konjunktion (Und-Verknüpfung)

Die Konjunktion zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Sie ist falsch, wenn mindestens eine Teilaussage falsch ist. Die Wahrheitstafel sieht daher "so" aus:

p.........q..........p Λ q
----
w.........w..........w
w.........f...........f
f..........w..........f
f..........f...........f

Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Die Disjunktion ist wahr, wenn mindestens eine Teilaussage wahr ist. Sie ist nur dann falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind. Die Wahrheitstafel sieht daher "so" aus:

p.........q..........p V q
----
w.........w..........w
w.........f...........w
f..........w..........w
f..........f...........f

Kontravalenz

Die Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen verschiedene Wahrheitswerte haben. Die Wahrheitstafel für die Kontravalenz:

p.........q..........p >-< q
----
w.........w..........f
w.........f...........w
f..........w..........w
f..........f...........f

Implikation

Die Aussagenverknüpfung p → q heißt *Implikation* (auch fälschlich Subjunktion oder Konditional genannt). Die Implikation p → q ist nur dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist. In allen anderen Fällen soll p → q wahr sein. Das ist eine Festlegung der formalen Logik. Im allgemeinen Sprachgebrauch ist das anders. Die formale Logik weicht somit bei der Implikation vom allgemeinen Sprachgebrauch ab. Diesen Bruch der formalen Logik mit der Sprachlogik hat man deshalb gemacht, damit die formale Logik auch mathematisierbar ist. Das wäre sonst nämlich nicht der Fall. Wahrheitstafel der Implikation:

p.........q..........p → q
----
w.........w..........w
w.........f...........f
f..........w..........w
f..........f...........w

Äquivalenz

p ↔ q heißt *Äquivalenz* (auch fälschlich Bisubjunktion oder Bikonditional genannt). p ↔ q ist genau dann wahr, wenn p und q die gleichen Wahrheitswerte besitzen. Auch hier weicht die formale Bestimmung der Wahrheitswerte von der Sprachlogik ab. Die Wahrheitstafel für die Äquivalenz:

p.........q..........p ↔ q
----
w.........w..........w
w.........f...........f
f..........w..........f
f..........f...........w

Andere Junktoren

Ein zweistelliger Junktor ist eine Funktion von zwei Aussagen... Insgesamt gibt es genau 16 Junktoren. Und so heißen die 16 möglichen Junktoren (ich gebe die einzelnen Symbole jetzt nicht alle wieder, denn diese ganzen Nebenjunktoren interessieren uns im weiteren Verlauf sowieso nicht. Dazu sind sie zu peripher.

...Wahrheitswerte-.......Name
...tafel

J1...w...w...w...w........Tautologie
J2...f....w...w...w........Exklusion
J3...w...f....w...w........Implikation
J4...w...w...f....w........Replikation
J5...w...w...w...f.........Disjunktion
J6...f....f....w...w........Pränonpendenz
J7...f....w...f....w........Postnonpendenz
J8...w...f....f....w........Äquivalenz

J9...f....w...w...f.........Kontravalenz
J10..w...f....w...f.........Postpendenz
J11..w...w...f....f.........Präpendenz
J12..f....f....f....w........Rejektion
J13..f....f....w...f.........Präsektion
J14..f....w...f....f.........Postsektion
J15..w...f....f....f.........Konjunktion
J16..f....f....f....f.........Antilogie

Junktorensymmetrie

Hier einmal einige Ideen zur Junktorensymmetrie: Ich beginne meine Überlegungen bei den vier einfachsten Junktoren. Diese sind:

	Wahrheitstafel
Exklusion	f w w w
Implikation	w f w w
Replikation	w w f w
Disunktion	w w w f

Und hier die beiden Pare, die die einen logischen Gegensatz beinhalten:

Implikation	w f w w
Replikation	w w f w

Exklusion	f w w w
Disunktion	w w w f

Nun bilden wir zu jedem der obigen vier Junktoren die Negation:

Konjunktion	w f f f
Postsektion	f w f f
Präsektion	f f w f
Rejektion	f f f w

Und hier wieder die beiden logischen Gegensatzpaare:

Postsektion	f w f f
Präsektion	f f w f

Konjunktion	w f f f
Rejektion	f f f w

Und nun die beiden Sonderformen, die ganz für sich stehen. Sie stellen sowohl die Negation, als auch das logische Gegenteil dar…

Tautologie	w w w w
Antilogie	f f f f

Und nun kommen wir zu den genau sechs Synthesen:

	Wahrheitstfel
Äquivalenz	w f f w
ist die Synthese aus:	
Implikation	w f w w
Replikation	w w f w
Kontravalenz	f w w f
Ist die Synthese aus	
Exklusion	f w w w
Disunktion	w w w f
Pränonpendenz	f f w w
Ist die Synthese aus	
Exklusion	f w w w
Implikation	w f w w
Präpendenz	w w f f
Ist die Synthese aus	
Replikation	w w f w
Disunktion	w w w f
Postnonpendenz	f w f w
Ist die Synthese aus	
Exklusion	f w w w
Replikation	w w f w
Postpendenz	w f w f
Ist die Synthese aus	
Implikation	w f w w
Disunktion	w w w f

Und nun noch eben die drei Paare von Synthesen, die sowohl Negation, als auch logisches Gegenteil sind:

	Wahrheitstafel
Äquivalenz	w f f w
Kontravalenz	f w w f
Pränonpendenz	f f w w
Präpendenz	w w f f
Postnonpendenz	f w f w
Postpendenz	w f w f

3. Gesetze der Aussagenlogik

3.1 Wahrheitstafeln

Jede komplexe Aussageform lässt sich in einer Wahrheitstafel in ihre Wahrheitswerte entwickeln. Hierzu gibt man den Wahrheitswert der ganzen Aussage in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Aussagenvariablen an. Enthält die Aussage 2 Variablen, so sind 4 Fälle möglich; bei 3 Variablen muss man 8 Fallunterscheidungen machen usw.

Beispiel:

Wir stellen die Wahrheitstafel von ¬p Λ (q → p) auf.

p.........q........¬p........(q → p).....¬p Λ (q → p)
----
w........w.........f..........w.............f
w........f..........f..........w.............f
f.........w.........w.........f..............f
f.........f..........w.........f..............w

Definition 1

Eine Aussageform heißt *Tautologie*, wenn sie für jede Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten einen wahren Ausdruck liefert. Man sagt auch: Der Ausdruck ist allgemeingültig (oder tautologisch).

In der Wahrheitswertentwicklung des Ausdrucks (d.h. in der letzten Spalte der Wahrheitstafel) tauchen nur die Wahrheitswerte w auf. Tautologische Gesetze kennzeichnet man dadurch, dass man das Zeichen ⊢ davor setzt:

Beispiel:

Man zeige, dass ((p → q) Λ p) → q eine Tautologie ist.

p.........q........$q \rightarrow p$....$(q \rightarrow p) \wedge p$.....$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
----
w........w.........w..........w..................w
w........f..........f...........f...................w
f.........w.........w..........f...................w
f.........f..........w..........f...................w

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Tautologien der Aussagenlogik:

$\vdash$...$p \vee \neg p$..Satz vom ausgeschlossenen Dritten
$\vdash$...$\neg(p \wedge \neg p)$..Satz vom Widerspruch
$\vdash$...$p \rightarrow p$
$\vdash$...$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
$\vdash$...$(p \wedge q) \rightarrow p$
$\vdash$...$p \rightarrow (p \vee q)$
$\vdash$...$p \rightarrow (q \rightarrow p)$......................................Paradoxie der Implikation
$\vdash$...$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$....................................Paradoxie der Implikation
$\vdash$...$(\neg p \wedge p) \rightarrow q$.....................................Paradoxie der Implikation
$\vdash$...$p \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$....................................Paradoxie der Implikation
$\vdash$...$(p \rightarrow \neg p) \vee (\neg p \rightarrow p)$..........................Paradoxie der Implikation
$\vdash$...$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.............................Paradoxie der Implikation
$\vdash$...$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$.............................Modus ponens der Implikation
$\vdash$...$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$.........................Modus tollens der Implikation
$\vdash$...$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
$\vdash$...$(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$...................Prämissenverschmelzung
$\vdash$...$(p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$...........Prämissenvertauschung
$\vdash$...$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \wedge p) \rightarrow (r \wedge q))$
$\vdash$...$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$

Diese Gesetze bilden die Grundlage für logische Schlüsse, z.B. den Modus ponens oder den Kettenschluss...

Paradoxien der Implikation und der Replikation

„Die Paradoxien der materiale Implikation oder Subjunktion sind eine Gruppe von Formeln der Aussagelogik, die zwar Tautologien, aber intuitiv problematisch sind. Die Ursache der Paradoxien liegt darin, dass die Interpretation der Wahrheit einer Implikation in der natürlichen Sprache nicht ihrer formalen Interpretation in der klassischen Logik durch Wahrheitstabellen entspricht.“ (Wiki)

„Die Aussage „Wenn es jetzt regnet, dann nehme ich einen Regenschirm mit“ wird in der klassischen Aussagelogik mit **p → q** formalisiert. Diese Aussage ist nach Definition der Subjunktion falsch, wenn **p** wahr ist und **q** falsch, ansonsten wahr (wen **p** falsch und **q** wahr, wenn **p** und **q** beide wahr, und wenn **p** und **q** beide falsch). Das folgt aus der Interpretation (der Subjunktion) als einer Wahrheitswertfunktion durch die Wahrheitstabelle (…). Wenn es also nicht regnet, ist die Aussage „Wenn es jetzt regnet, dann nehme ich einen Regenschirm mit „in beiden Fällen wahr, gleich, ob ich dann einen Regenschirm mitnehme oder nicht.

materiale Implikation	p	q	wenn p, dann q
	w	w	w
	w	f	f
	f	w	w
	f	f	w

Auch die Aissage “Wenn es morgen regnet, dann ist **2 x 2 = 4**“ ist aussagelogisch richtig, denn
„**2 x 2 = 4“** ist ja richtig, unabhängig davon, ob es morgen regnet, oder nicht. Dieses Beispiel deutet schon auf den problematischen Punkt der Implikation hin: **p → q** kann wahr sein, ohne dass zwischen **p** und **q** irgendein inhaltlicher Zusammenhang besteht, denn der Wahrheitswert der Subjunktion hängt ja nur von den Wahrheitswerten von **p** und **q** ab.“ (Wiki)

Offensichtlich entsteht der Widerspruch dadurch, dass die Wahrheitstabelle falsch ist. Das gilt übrigens in gleicher Weise für die materiale Äquivalenz. Die Wahrheitstabellen sowohl der materialen Implikation, als auch der materialen Äquivalenz sind somit nicht aufrechtzuerhalten. Ich hänge eben eine entsprechende Darstellung an.

Implikation und Replikation

materiale Implikation	p	q	wenn p, dann q
	w	w	w
	w	f	f
	f	w	w ??
	f	f	w ??

materiale Replikation	p	q	nur wenn p, dann q
	w	w	w
	w	f	w ??
	f	w	f
	f	f	w ??

Die Paradoxien der Implikation

Hier nun die Paradoxien der materialen Implikation :

1. $(\neg p \wedge p) \rightarrow q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
5. $(p \rightarrow \neg p) \vee (\neg p \rightarrow p)$
6. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Dass alle diese Formeln Tautologien sind, kann man mit der Methode der Wahrheitstabelle überprüfen. Man kann sie aber auch schneller einsehen, wenn man die Beziehung

benutzt: Im Falle der 6. Formel oben z.B. ist der erste Teil der Disjunktion nur dann nicht wahr, wenn $p$wahr, aber $q$falsch ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr.

Der Philosoph Charles Sanders Peirce hat die oben aufgeführte 6. Variante einmal so illustriert: Wenn man eine Zeitung Satz für Satz zerschneidet, alle Sätze in einen Hut schüttet und zwei beliebige zufällig wieder herausholt, dann ist der erste dieser Sätze eine Folgerung des zweiten oder umgekehrt. Auch an diesem Beispiel sieht man, dass die materiale Implikation überhaupt nichts mit dem Inhalt der beteiligten Aussagen zu tun hat (sondern nur mit den Wahrheitswerten).

1. Paradox (Implikation): Wenn nicht p und p, dann q.

Die Implikation ist laut Wahrheitstabelle dann falsch, wenn der erste Teil wahr ist, der zweite aber falsch. „Wenn nicht p und p kann aber nicht wahr sein, und dann ist die Implikation wahr. Und das ist eben kontraintuitiv.

2. Paradox (Implikation): Wenn p, dann (wenn q, dann p).

Die Implikation ist falsch, wenn p wahr, und die Konsequenz falsch ist. Die Konsequenz ist aber falsch, wenn q wahr und p falsch ist. Und da p nicht zugleich wahr und falsch sein kann, handelt es sich um einen Widerspruch.

3. Paradox (Implikation): Wenn nicht p, dann (wenn p, dann q)

Die Implikation ist dann falsch, wenn nicht p wahr, und die Konklusion falsch. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn p wahr und q falsch. Nicht p und p können aber nicht gleichzeitig wahr sein.

4. Paradox (Implikation): Wenn p, dann q oder nicht q

Die Implikation ist dann falsch, wenn p wahr, und die Konklusion falsch ist. Letzteres ist nur dann der fall, wenn q falsch und nicht q ebenfalls falsch ist. und das ist unmöglich.

5. Paradox (Implikation): (wenn p, dann nicht p) oder (wenn nicht p, dann p)

Der erste Teil der Disjunktion ist falsch, wenn p wahr und nicht p falsch ist. Dann wird allerdings der zweite Teil der Disjunktion wahr, was kontraintuitiv ist

6. Paradox (Implikation): (wenn p, dann q) oder (wenn q dann p)

"Im Falle der 6. Formel oben z.B. ist der erste Teil der Disjunktion nur dann (falsch), wenn p wahr, aber q falsch ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr." (Wiki)

Die Paradoxien der Replikation

Nun können wir auch endlich die sich ergebenden Paradoxien der materialen Replikation angeben. Dabei ist lediglich zu berücksichtigen, dass die materiale Replikation nur dann falsch ist, wenn p falsch ist, und q wahr. Hier die sechs Paradoxien:

1. Paradox (Replikation): Nur wenn p, dann (nicht q und q).

Die Replikation ist laut Wahrheitstabelle dann falsch, wenn der zweite Teil wahr ist, der erste aber falsch. „Wenn nicht p und p kann aber nicht wahr sein, und dann ist die Replikation wahr. Und das ist eben kontraintuitiv.

2. Paradox (Replikation): Nur wenn (nur wenn q, dann p), dann q.

Die Replikation ist falsch, wenn der erste Teil falsch ist, und q wahr. .Der erste Teil ist aber falsch, wenn p wahr und q falsch ist. Und da q nicht zugleich wahr und falsch sein kann, handelt es sich um einen Widerspruch.

3. Paradox (Replikation): Nur wenn (nur wenn p, dann q), dann nicht q.

Die Replikation ist dann falsch, wenn der erste Teil falsch ist, und nicht q wahr. Ersteres ist nur dann der Fall, wenn p falsch ist und q wahr. Nicht q und q können aber nicht gleichzeitig wahr sein.

4. Paradox (Replikation): Nur wenn (p oder nicht p), dann q.

Die Replikation ist dann falsch, wenn der erste Teil falsch, und q wahr ist. Ersteres ist aber nur dann der Fall, wenn p falsch und nicht p ebenfalls falsch ist. und das ist unmöglich.

5. Paradox (Replikation): (Nur wenn p, dann nicht p) oder (nur wenn nicht p, dann p).

Der erste Teil der Disjunktion ist falsch, wenn p falsch und nicht p wahr ist. Dann wird allerdings der zweite Teil der Disjunktion wahr, was kontraintuitiv ist

6. Paradox (Replikation): (Nur wenn p, dann q) oder (nur wenn q, dann p).

Im Falle der 6. Formel oben ist der erste Teil der Disjunktion nur dann (falsch), wenn p falsch, aber q wahr ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr.

Die Paradoxien der Äquivalenz

Hier noch eben die beiden Paradoxien der Äquivalenz:

1. Paradox der Äquivalenz: (Nicht p und p) gdw (nicht q und q)

2. Paradox der Äquivalenz: (Nicht p oder p) gdw (nicht q oder q)

Modus ponens und Modus tollens

Modus (ponendo) ponens und Modus (tollendo) tollens:

1. Modus ponens (Implikation)

$$\frac{\begin{array}{l}(X \rightarrow Y)\\ X\end{array}}{Y}$$

2. Modus tollens (Implikation)

$$\frac{\begin{array}{l}(X \rightarrow Y)\\ \neg Y\end{array}}{\neg X}$$

3. Modus ponens (Replikation)

$$\frac{\begin{array}{l}(X \leftarrow Y)\\ Y\end{array}}{X}$$

4. Modus tollens (Replikation)

$$\frac{\begin{array}{l}(X \leftarrow Y)\\ \neg X\end{array}}{\neg Y}$$

Interessant ist, dass in der Logik die Schlussregeln ausschließlich für die Implikation definiert sind, Die Äquivalenz ist noch gar nicht definiert. Sie findet gar keine Berücksichtigung. Das ist natürlich ein untragbarer Zustand, der dringend beendet werden muss.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Seien p und q Sachverhalte;

(1) Wenn gilt (d.h., wenn wahr ist): wenn p, dann q (Implikation); dann heißt p *hinreichende Bedingung* für q.

(2) Wenn gilt (d.h., wenn wahr ist): „nur“ wenn p, dann q (Replikation); dann heißt p *notwendige Bedingung* für q.

Im Falle begrifflicher Abhängigkeitsverhältnisse erlaubt die Kenntnis, dass p hinreichend für q den Schluss, dass q notwendig für p ist, und umgekehrt.

5. Prädikatenlogik

So Leute, wir blättern jetzt einmal ganz weit vor, bis Kapitel 5.4 "Quantoren"... Denn da geht es dann wirklich ans Eingemachte...

5.4 Quantoren

Wir betrachten ein *Beispiel:* M sei die Familie Meier. Die Familie Meier besteht aus Herrn Meier (h), Frau Meier (f) und den Söhnen Tim (t), Kai (k) und Uwe (u). Dei Menge M enthält daher 5 Elemente: M = (h, f, t, k, u). Angenommen, jeder in der Familie Meier hat blonde Haare. Wie können wir diese Aussage formulieren? Zunächst definieren wir das Prädikat B: B(x) = x hat blonde Haare. Nun gehen wir zu der Aussage "Jeder in der Familie Meier hat blonde Haar" über. Dies können wir entweder dadurch formulieren, dass wir aufzählen: B(h) A (B(f) A B(t) A B(k) A B(u), oder wir schreiben kürzer: Für alle x ε M gilt (B(x), formal: $\forall$x ε M: B (x). $\forall$ heißt *Allquantor*. (...)

Nehmen wir an, dass irgend jemand in der Familie Meier raucht, aber wir wissen nicht, wer es ist. Wie kann man diese Aussage formulieren? Hierzu definieren wir das Prädikat R: R(x) = x ist Raucher. Die Aussage lautet: "Es gibt jemanden in der Familie Meier, der raucht". Das heißt: R(h) V R(f) V R(t) V R(k) V R(u). Äquivalent dazu ist die Aussage: Es gibt (mindestens) ein x ε M, für das gilt R(x). Formal schreiben wir dafür: $\exists$x ε M: R (x). $\exists$ heißt *Existenzquantor*. Man beachte: $\exists$x bedeutet nicht, dass es *genau ein* x ε M gibt, denn es kann durchaus mehrere Raucher in der Familie Meier geben.

Bemerkungen: Der Allquantor $\forall$ bedeutet eine Zusammenfassung beliebig vieler (unter umständen sogar unendlich vieler) Konjunktionen) Der Existenzquantor $\exists$ stellt eine Zusammenfassung beliebig vieler Disjunktionen dar.

Betrachtet man nicht bestimmte Mengen von Objekten, sondern beliebige Objekte, dann lässt man die Mengenschreibweise weg und schreibt etwas kürzer $\forall$x P(x) oder $\exists$x P(x).

Man nennt eine Variable, die im Wirkungsbereich eines All- oder Existenzquantors steht, eine *gebundeneVariable*. Ist eine Variable nicht durch einen Quantor gebunden, so heißt sie *freie Variable*.

Beispiele:

1.) F(x) = x fließt. $\Rightarrow$ alles fließt = $\forall$x F(x)

2.) U(x, y) = x ist Ursache von y.
$\forall$y $\exists$x U(x, y) = Alles hat eine Ursache.
Man beachte, dass dies nicht dasselbe ist wie $\exists$x $\forall$y U(x, y) (= Es gibt eine Ursache für alles).

3.) H(x, y) = x hängt mir y zusammen
$\forall$x $\forall$y H(x, y) = Alles hängt mit allem zusammen.

4.) $\exists x \,\varepsilon\, R$: $x^2 = 2$ heißt: Es gibt (mindestens) eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = 2$. (Man beachte: Hier gibt es sogar zwei Lösungen!)

5.) $\neg\exists x \,\varepsilon\, R$: $x^2 = -1$ heißt: Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -1 ist.

6.) P(x) soll heißen: x ist vollkommen.
Nichts ist vollkommen. = Es gibt kein x, dass vollkommen ist. = $\neg\exists x\, P(x)$. Dies ist dasselbe wie wenn man sagt: Alle Dinge sind unvollkommen. = $\forall x\, \neg P8x)$

7.) V(x) = x ist vergänglich.
$\forall x\, V(x)$ = Alles ist vergänglich = Nichts ist unvergänglich. = Es gibt kein x, das nicht vergänglich ist. = $\neg\exists x\, \neg P(x)$

8.) Es ε gibt keine größte natürliche Zahl.
$= \neg\exists x \,\varepsilon\, N\ \forall y \,\varepsilon\, N\ x > y = \forall x \,\varepsilon\, N\ \exists x \,\varepsilon\, N\ x < y =$
= Zu jeder Zahl x gibt es keine größere Zahl y. Auch hier würde die Vertauschung der Quantoren zu einer anderen Aussage führen: $\exists x \,\varepsilon\, N\ \forall x \,\varepsilon\, N\ x < y$. Dies würde aber heißen, dass es doch eine größte natürliche Zahl gibt.

An den obigen Beispielen kann man folgende *Regeln* für die Negation der Quantoren ablesen (Nein, kann man nicht, aber ich lasse das jetzt mal so stehen.):

1. $\neg\exists x\, P(x) = \forall x\, \neg P(x)$......oder:
... $\exists x\, P(x) = \neg\forall x\, \neg P(x)$

2. $\neg\forall x\, P(x) = \exists x\, \neg P(x)$......oder:
... $\forall x\, P(x) = \neg\exists x\, \neg P(x)$

Die Negation einer Existenzaussage ergibt eine Allaussage und umgekehrt. (...)

Wie sehen, dass sich die Gleichheit der Aussagen einmal mit Allquantor und einmal mit Existenzquantor durch "doppelte" Negation ergibt... Das hört sich zwar schon erheblich besser an, als bei Detel, aber ich möchte da trotzdem gerne noch ein Fragezeichen hinter machen... Überprüfen wir gleich einmal, wie es bei Detel war...

Allgemeine Übersetzungsregeln für nicht-komplexe Formeln mit "P" und "Q" als Prädikatorenvariablen und "x" als Gegenstandsvariable lauten:

(i) $\forall x\, P(x)$: Für jedes x gilt: x ist P (alle x sind P)
(ii) $\exists x\, P(x)$: Es gibt (mindestens) ein x, so dass gilt: x ist P ((mindestens) ein x ist P)
(iii) $\neg\forall x\, P(x)$: Nicht für jedes x gilt: x ist P (nicht alle x sind P)
(IV) $\neg\exists x\, P(x)$: Es gibt kein x, so dass gilt: x ist P (kein x ist P)
(v) $\forall x\, \neg P(x)$: Für jedes x gilt: x ist nicht P (alle x sind nicht P oder: kein x ist P)
(vi) $\exists x\, \neg P(x)$: Es gibt ein x, so dass gilt: x ist nicht P (ein x ist nicht P)
(vii) $\neg\forall x\, \neg P(x)$: Nicht für jedes x gilt: x ist nicht P (nicht alle x sind nicht P)
(viii) $\neg\exists x\, \neg P(x)$: Es gibt kein x, so das gilt: x ist nicht P (kein x ist nicht P oder: alle x sind P)

Eine interessante Frage ist, ob einige dieser Formeln das Gleiche besagen. Offenbar besagen (i) und (viii) das Gleiche, ebenso wie (ii) und (vi), (iii) und (vi), (iv) und (v).

Ja, bei Detel ist es tatsächlich auch korrekt... Ich hatte es nur falsch übernommen... Es gilt also, wie Zoglauer so weit korrekt sagt diese Doppelregel:

1. $\neg\exists x\ P(x) = \forall x\ \neg P(x)$......oder:
... $\exists x\ P(x) = \neg\forall x\ \neg P(x)$

2. $\neg\forall x\ P(x) = \exists x\ \neg P(x)$......oder:
... $\forall x\ P(x) = \neg\exists x\ \neg P(x)$

Und trotzdem möchte ich da noch ein großes Fragezeichen hinter machen... .

?

Wir können gleich einmal versuchen, herauszufinden, wo hier eigentlich das Problem liegt...

Also: Wir haben gegeben 8 einfachste prädikatenlogische Formeln, die sich auf vier Paarungen reduzieren:

(i) $\forall x\ P(x)$: Für jedes x gilt: x ist P (alle x sind P)
(ii) $\exists x\ P(x)$: Es gibt (mindestens) ein x, so dass gilt: x ist P ((mindestens) ein x ist P)
(iii) $\neg\forall x\ P(x)$: Nicht für jedes x gilt: x ist P (nicht alle x sind P)
(IV) $\neg\exists x\ P(x)$: Es gibt kein x, so dass gilt: x ist P (kein x ist P)
(v) $\forall x\ \neg P(x)$: Für jedes x gilt: x ist nicht P (alle x sind nicht P oder: kein x ist P)
(vi) $\exists x\ \neg P(x)$: Es gibt ein x, so dass gilt: x ist nicht P (ein x ist nicht P)
(vii) $\neg\forall x\ \neg P(x)$: Nicht für jedes x gilt: x ist nicht P (nicht alle x sind nicht P)
(viii) $\neg\exists x\ \neg P(x)$: Es gibt kein x, so das gilt: x ist nicht P (kein x ist nicht P oder: alle x sind P)

Eine interessante Frage ist, ob einige dieser Formeln das Gleiche besagen. Offenbar besagen (i) und (viii) das Gleiche, ebenso wie (ii) und (vii), (iii) und (vi), (iv) und (v).

Das führt zu den folgenden zwei Regeln:

1. $\neg\exists x\ P(x) = \forall x\ \neg P(x)$......oder:
... $\exists x\ P(x) = \neg\forall x\ \neg P(x)$
.. $\neg\forall x\ P(x) = \exists x\ \neg P(x)$......oder:
... $\forall x\ P(x) = \neg\exists x\ \neg P(x)$

Und nun läst sich der Gesamtzusammenhang als ein prädikatenlogisches Quadrat darstellen, aber nicht auf nur eine Weise, sondern mindestens auf zwei... Ich zeige gleich einmal, wie...

Prädikatenlogisches Quadrat mir nur dem Allquantor:

$\forall$x P(x).............Alle x sind P.............................Alle x sind P
$\neg\forall$x P(x)...........Nicht alle x sind P ....Einige x sind P
$\neg\forall$x ¬P(x)..........Nicht alle x sind nicht P...........Einige x sind nicht P
$\forall$x ¬P(x)...........Kein x ist P..........-....................Kein x ist P

Prädikatenlogisches Quadrat mit Allquantor "und Existenzquantor:

$\forall$x P(x).............Alle x sind P
$\exists$x P(x).............Einige x sind P
$\exists$x ¬P(x)...........Einige x sind nicht P
$\forall$x ¬P(x)...........Kein x ist P

Und eben daraus ergibt sich ein logischer Widerspruch, denn dann gelten die beiden vorher aufgestellten Regeln nicht mehr:

1. $\neg\exists$x P(x) = $\forall$x ¬P(x)......oder:
...$\exists$x P(x) = $\neg\forall$x ¬P(x)

2. $\neg\forall$x P(x) = $\exists$x ¬P(x)......oder:
...$\forall$x P(x) = $\neg\exists$x ¬P(x)

1. Denn nach unserer Vorüberlegung würde sich ergeben:

$\neg\forall$x P(x) = $\exists$x P(x)

Tatsächlich soll sich aber ergeben:

$\neg\forall$x P(x) = $\exists$x ¬P(x)

Und das ist ein logischer Widerspruch...

2. Außerdem würde sich nach unserer Vorüberlegung ergeben:

$\neg\forall$x ¬P(x) = $\exists$x ¬P(x)

Tatsächlich sollte sich aber ergeben:

$\exists$x P(x) = $\neg\forall$x ¬P(x)

Und auch das ist ein logischer Widerspruch...

Man kann es auch bei Aristoteles festmachen:

Bei Aristoteles hat alles die folgende Form:

Alle x sind P
Einige x sind P
Einige x sind nicht P
Kein x ist P

Aber wie soll man es interpretieren? Wie soll man das "Einige" interpretieren... Dafür gibt es genau zwei Möglichkeiten:

I.

$\forall$ x P(x)............Alle x sind P..............................Alle x sind P
$\neg\forall$ x P(x)...........Nicht alle x sind P ....Einige x sind P
$\neg\forall$ x $\neg$P(x).........Nicht alle x sind nicht P............Einige x sind nicht P
$\forall$ x $\neg$P(x)...........Kein x ist P................................Kein x ist P

II.

$\forall$ x P(x)............Alle x sind P
$\exists$ x P(x)............Einige x sind P
$\exists$ x $\neg$P(x)...........Einige x sind nicht P
$\forall$ x $\neg$P(x)...........Kein x ist P

Das führt aber zu logischen Widersprüchen, wie ich gezeigt habe...

Mein Vorschlag ist, eine neue, eine dritte Form zu entwickeln:

$\forall$ x P(x)............Alle x sind P
$\neg\forall$ x P(x)...........Einige x sind P
$\exists$ x P(x).............Mindestens ein x ist P
$\neg\exists$ x P(x)............Kein x ist P

Damit sollten sich die Schwierigkeiten und Probleme und vor allem die Widersprüche auflösen lassen...

Fazit

Genau so, wie ich es oben vorgeschlagen habe, ist es auch bei Zoglauer... Das bedeutet, dass es so korrekt ist... Wo ist nun aber das Problem? Das Problem entsteht, wenn im prädikatenlogischen Paradigma das Wort "einige" eingesetzt wird... Das führt eben zu Widersprüchen... Die Einsetzung des Wortes "einige" ist also in der Prädikatenlogik streng verboten... Allein die beiden Formulierungen "Nicht alle x sind P" und es gibt mindestens ein x, dass P" sind erlaubt, und man sollte sich auch konsequent daran halten... Anders ist es beim aristotelischen Paradigma... Da gibt es genau diese beiden Formulierungen nicht... Dafür aber die beiden Formulierungen "einige x sind P" und einige x sind nicht P"... Das kann man machen, darf es aber nicht mit der Prädikatenlogik plotten... Das führt eben zu den besagen Widersprüchen... Das prädikatenlogische Paradigma und das aristotelische Paradigma sind streng auseinanderzuhalten... Und für das aristotelische Paradigma gibt es, wenn man es denn doch in die Prädikatenlogik transformieren will, genau zwei Lösungen... Die hatten wir aber schon... Man muss es dann, wenn im aristotelischen Paradigma das Wort "einige" auftaucht, immer doppelt übertragen, einmal als "nicht alle" und einmal als "mindestens eins"... Anders lässt sich das Problem nicht lösen... Die Schwierigkeit an sich ist eine rein historische, sie ist entstanden, weil sie sich historisch so gebildet hat... Wichtig ist allein, dass das Problem ganz klar und deutlich gesehen wird, sonst kommt man jedes Mal in Teufels Küche... Hier noch einmal die beiden Transformationen von der Syllogistik des Aristoteles in die Prädikatenlogik:

I.

Alle x sind P........................... $\forall$x P(x)...........Alle x sind P
Einige x sind P.....................$\neg\forall$x P(x)............Nicht alle x sind P
Einige x sind nicht P..........$\neg\forall$x $\neg$P(x)............Nicht alle x sind nicht P
Kein x ist P........................... $\forall$x $\neg$P(x)............Kein x ist P

II.

Alle x sind P........................... $\forall$x P(x).............Alle x sind P
Einige x sind P........................ $\exists$x P(x).............Mindestens ein x ist P
Einige x sind nicht P............. $\exists$x $\neg$P(x).............Mindestens ein x ist nicht P
Kein x ist P............................ $\forall$x $\neg$P(x).............Kein x ist P

Ich denke, es ist so weit klar geworden, worum es mir geht... Damit sollte der ganze Komplex der Prädikatenlogik hinreichend erörtert worden sein... Noch einmal: Das Wort "einige" darf in der Prädikatenlogik, also im prädikatenlogischen Paradigma auf gar keinen Fall verwendet werden... Es darf (und soll auch) nur im aristotelischen Paradigma verwendet werden... Transformiert man es dann aber in die Prädikatenlogik, erhält man in Bezug auf das Wort "einige" zwei!!! Lösungen... Das ist eben der springende Punkt...Es wäre also notwendig, diese Erkenntnis in Zukunft konsequent zu berücksichtigen...

8 Modallogik: 8.1 Modaloperatoren

Die Modallogik stellt eine Erweiterung der Aussagenlogik dar, in der neben der Wahrheit und Falschheit auch Möglichkeit und Notwendigkeit als logische Zustände vorkommen können. In der Aussagenlogik konnten Aussagen immer nur wahr oder falsch sein. Dabei machte es keinen Unterschied, ob eine Aussage nur zufällig oder sogar notwendig wahr ist. *Kontingente Wahrheiten* oder *Tatsachenwahrheiten* sind "zufällig" wahr, weil unsere Welt gerade so beschaffen ist, wie sie ist. Kontingente Wahrheiten drücken daher das Sosein der Welt aus. Dagegen gelten *notwendige Wahrheiten* oder *Vernunftwahrheiten* unabhängig von der Beschaffenheit unserer Welt, wie z.B. die logischen oder mathematischen Wahrheiten.

Kontingente Wahrheiten sind z.B. die Sätze "Die Sonne hat 9 Planeten" oder "Richard Nixon hat 1968 die Wahl zum Präsidenten der Vereinigten Staaten von Amerika gewonnen". Diese Aussagen sind nur zufällig wahr, weil unsere Sonne genau so gut 15 oder gar keinen Planeten haben könnte oder weil die Weltgeschichte auch einen anderen Verlauf genommen haben könnte, bei der Nixon nicht zum Präsidenten gewählt worden wäre. Im Gegensatz dazu ist der

Satz "9 ist größer als 7" oder der Satz vom ausgeschlossenen Dritten notwendig wahr, unabhängig davon, in welcher Welt wir leben.

Neben notwendigen und kontingenten Wahrheiten gibt es aber auch Aussagen, die faktisch falsch sind, aber wahr sein könnten, wenn die Welt anders aussähe oder die Geschichte anders verlaufen wäre. Solche kontrafaktischen oder kontingent falschen Aussagen sind z.B. die Sätze "Die Sonne hat 7 Planeten" oder "Der Vizepräsident der Vereinigten Staaten heißt Jerry Lewis".

Insgesamt sind also 4 Möglichkeiten denkbar:
1. p ist notwendig wahr.
2. p ist wahr, aber nicht notwendig wahr (= p ist kontingent wahr).
3. p ist falsch, aber nicht notwendig falsch (= p ist kontingent falsch).
4. p ist notwendig falsch, d.h. unmöglich.

Immanuel Kant unterscheidet in der Kritik der reinen Vernunft (B 106) drei modale Kategorien: Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit. Zur semantischen Interpretation dieser Begriffe gibt es in der Philosophie verschieden Auslegungen.

Nicolai Hartmann interpretiert die Grundmodalitäten wie folgt:
1. Notwendigkeit = nicht anders sein können = so sein müssen
2. Wirklichkeit = so und nicht anders sein
3. Möglichkeit = so sein können = nicht anders sein müssen
4. Unmöglichkeit = nicht so sein können = anders sein müssen

Rudolf Carnap gibt in seiner "Logischen Syntax der Sprache" (Wien 1934) den Modalitäten eine syntaktische Deutung:
1. p ist notwendig = p ist analytisch
2. p ist zufällig (kontingent) = p ist synthetisch
3. p ist möglich = p ist widerspruchsfrei (nicht kontradiktorisch)
4. p ist unmöglich = p ist kontradiktorisch (in sich selbst widersprüchlich)

Von *Saul A. Kripke* stammt die heute weitgehend akzeptierte Interpretation der Modalitäten als Realisierungen in *möglichen Welten*, die teilweise auf Gedanken von G.W. Leibniz zurückgeht:
1. p ist notwendig = p ist wahr in allen möglichen Welten
2. p ist wirklich = p ist wahr in unserer Welt
3. p ist möglich = p ist wahr in einer möglichen Welt
4. p ist unmöglich = p ist in keiner möglichen Welt wahr

Es ist nicht ganz klar, was man sich unter einer "möglichen Welt" vorzustellen hat. Nach *David Lewis* sind mögliche Welten so eine Art "Parallel-Universen", die sich in irgendeiner Eigenschaft von unserem Universum unterscheiden: (...)

Kripke wollte seine Theorie möglicher Welten nicht ontologische im Sinne eines modalen Realismus verstanden wissen. Mögliche Welten sind für ihn keine Paralleluniversen oder andere Science-fiction-Phantasiegebilde, sondern lediglich "mögliche Zustände der Welt" oder "kontrafaktische Situationen". "Mögliche Welten sind vollständige 'Weisen, wie die Welt hätte sein können' oder Zustände oder Geschichten der gesamten Welt." (Kripke 1993, S.26) Kripke illustriert dies an einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie: Bei einem Wurf mit einem Würfel sind sechs verschiedene Ausgänge denkbar, davon ist nur ein Ausgang wirklich: Es wird eine 1, 2, 3, 4, 5, oder 6 geworfen. Die sechs möglichen Zustände sind für Kripke sechs mögliche Welten, von denen nur eine Welt wirklich ist.

In der Modallogik behandelt man die Modalitäten nicht als zusätzliche Wahrheitswerte, neben den zwei bekannten Wahrheitswerten wahr und falsch, sondern man fasst die als [logische] Operatoren auf, die einer Aussage p eine Aussage über eine Modalität zuordnet. Es gibt zwei Grundoperatoren:
M: Möglichkeit
N: Notwendigkeit

Man beachte: Dei Modaloperatoren sind nicht warhheitsfunktional! **M**p und **N**p sind Aussagen und können entweder wahr oder falsch sein, aber der Wahrheitswert von **M**p und **N**p kann nicht aus dem Wahrheitswert von p bestimmt werden. D.h. keine der folgenden Äquivalenzen ist richtig:
Np = p
Np = ¬p
Np = p V ¬p
Np = p A ¬p

Bei der Modallogik handelt es sich also "nicht" um eine vierwertige Logik, also um eine mehrwertige Logik, sondern doch nur um eine zweiwertige Logik... Zumindest nach üblichem Verständnis... Die Modalitäten sind "keine" eigenständigen Wahrheitswerte, sondern nur Modaloperatoren, also logische Operatoren...

Zwischen den beiden Grundmodalitäten **M** und **N** gelten folgende sprachliche Beziehungen:
1. **M**p = Es ist möglich, dass p = p ist nicht notwendigerweise falsch = ¬**N**(¬p)
2. **M**(¬p) = Es ist möglich, dass nicht-p = Es ist nicht notwendig, dass p = ¬**N**(p)
3. ¬**M**(p) = Es ist nicht möglich, dass p =Es gilt notwendiger Weise nicht-p = **N**(¬p)
4. ¬**M**(¬p) = Es ist nicht mögliche, das nicht-p gilt = Es ist notwendig, dass p = **N**p

Daraus leiten sich die beiden Negationsregeln ab:
N(¬p) = ¬**M**p... und
M(¬p) = ¬**N**p

Das logische Quadrat der Modalitäten

notwendig **N**p.........................**N**(¬p) unmöglich

...möglich **M**p..........................**M**(¬p) nicht notwendig

* Nichts kann zugleich möglich und unmöglich sein, nicht kann zugleich notwendig und nicht-notwendig sein. Möglichkeit und Unmöglichkeit, Notwendigkeit und Nicht Notwendigkeit stehen zueinander in *kontradiktorischem Gegensatz*.

* Nichts Notwendiges ist unmöglich, nicht unmögliches ist notwendig, aber es kann der Fall eintreten, dass etwas zugleich nicht notwendig und nicht unmöglich ist. Notwendiges und Unmögliches stehen zueinander in *konträrem Gegensatz.*

* Etwas kann möglich und nicht-notwendig sein. Mögliches und Nicht-Notwendiges stehen in einem *subkonträren* Verhältnis zueinander. Solche Aussagen, die möglich, aber nicht notwendig sein, nennt man *kontingent* oder *zufällig*

* Aus der Notwendigkeit folgt die Möglichkeit: **N**p → **M**p. "Wenn p notwendig ist, dann ist p auch möglich." (...)

Eigentlich alles ganz einfach... Die Modallogik scheint jedenfalls Hand und Fuß zu haben... Kripke sei Dank...

Joachim Stiller Münster, 2016

Ende

Zurück zur Startseite