

Joachim Stiller

Paradoxien der Replikation

Alle Rechte vorbehalten

Paradoxien

Die Paradoxien (Wiki)

Hier einmal Auszüge aus dem Wiki-Artikel zum Begriff „Paradoxon“

„Ein **Paradox(on)** (auch **Paradoxie**, Plural **Paradoxien** oder **Paradoxa**; von altgriechisch παράδοξον, von παρά *para* ‚gegen‘ und δόξα *dóxa* ‚Meinung‘, ‚Ansicht‘) ist ein scheinbar oder tatsächlich unauflösbarer Widerspruch. Es existieren verschiedene logische Formen des Paradoxons:

1. Widersprüchlichkeit als Folge der Negation von Selbstbezüglichkeit, d. h. wenn eine auf sich selbst anwendbare Aussage negiert wird. Eine solche selbstwidersprüchliche Aussage heißt in der Logik auch Antinomie. Der Nachweis eines solchen Widerspruchs ist eine Retorsion. Ein Beispiel ist das sogenannte Lügner-Paradox des Eubulides:
 - *Dieser Satz ist falsch.* (Eine solche Aussage ist wahr, wenn sie falsch ist und falsch, wenn sie wahr ist.) Eine besondere Form des selbstbezüglichen Widerspruchs ist der sogenannte performativer Widerspruch zwischen propositionalem Gehalt und performativem Gehalt.
2. In der Rhetorik eine Stilfigur, die in scheinbaren Widersprüchen eine tiefere Wahrheit veranschaulichen will (z. B. Oxymoron). Beispiel: *Weniger ist mehr!*
3. Phänomene und Fragen, die dem menschlichen Verstand bzw. der Intuition widersprechen. Hierzu gehört beispielsweise die alte Frage nach der Endlichkeit bzw. Unendlichkeit von Raum und Zeit. Ein unendliches Universum scheint dem gesunden Menschenverstand ebenso wie ein endliches zu widersprechen („Alles muss doch zu irgendeinem Zeitpunkt begonnen haben“ \neq „Was war vorher?“). Auch unter den Phänomenen, welche die moderne Quantenmechanik thematisiert, zeigen viele diese Art von paradoxer Natur.

Davon zu unterscheiden sind scheinbare Widersprüche, die sich bei genauerer Analyse auflösen. Das paradoxe an dieser Art von Paradoxien ist, dass es eigentlich keine sind. Die Analyse scheinbarer Paradoxien, beispielsweise im Rahmen eines Gedankenexperiments, hat schon oft zu wichtigen Erkenntnissen in Wissenschaft, Philosophie und Mathematik geführt. Der Widerspruch besteht dabei oft zwischen der intuitiven und der exakten Lösung. Ein Beispiel hierfür ist das Ziegenproblem, das logisch und mathematisch exakt lösbar ist, aber der Intuition vieler Menschen, ihrem „gesunden Menschenverstand“ widerspricht.

Einen unauflösbaren Widerspruch nennt man auch Aporie.

Paradoxien der Implikation und der Replikation

„Die Paradoxien der materiale Implikation oder Subjunktion sind eine Gruppe von Formeln der Aussagenlogik, die zwar Tautologien, aber intuitiv problematisch sind. Die Ursache der Paradoxien liegt darin, dass die Interpretation der Wahrheit einer Implikation in der natürlichen Sprache nicht ihrer formalen Interpretation in der klassischen Logik durch Wahrheitstabellen entspricht.“ (Wiki)

„Die Aussage „Wenn es jetzt regnet, dann nehme ich einen Regenschirm mit“ wird in der klassischen Aussagenlogik mit $p \rightarrow q$ formalisiert. Diese Aussage ist nach Definition der Subjunktion falsch, wenn p wahr ist und q falsch, ansonsten wahr (wenn p falsch und q wahr, wenn p und q beide wahr, und wenn p und q beide falsch). Das folgt aus der Interpretation (der Subjunktion) als einer Wahrheitswertfunktion durch die Wahrheitstabelle (...). Wenn es also nicht regnet, ist die Aussage „Wenn es jetzt regnet, dann nehme ich einen Regenschirm mit“, in beiden Fällen wahr, gleich, ob ich dann einen Regenschirm mitnehme oder nicht.

materiale Implikation	p	q	wenn p, dann q
	w	w	w
	w	f	f
	f	w	w
	f	f	w

Auch die Aussage „Wenn es morgen regnet, dann ist $2 \times 2 = 4$ “ ist aussagelogisch richtig, denn

„ $2 \times 2 = 4$ “ ist ja richtig, unabhängig davon, ob es morgen regnet, oder nicht. Dieses Beispiel deutet schon auf den problematischen Punkt der Implikation hin: $p \rightarrow q$ kann wahr sein, ohne dass zwischen p und q irgendein inhaltlicher Zusammenhang besteht, denn der Wahrheitswert der Subjunktion hängt ja nur von den Wahrheitswerten von p und q ab.“ (Wiki)

Offensichtlich entsteht der Widerspruch dadurch, dass die Wahrheitstabelle falsch ist. Das gilt übrigens in gleicher Weise für die materiale Äquivalenz. Die Wahrheitstabellen sowohl der materialen Implikation, als auch der materialen Äquivalenz sind somit nicht aufrechtzuerhalten. Ich hänge eben eine entsprechende Darstellung an.

Implikation und Replikation

materiale Implikation	p	q	wenn p, dann q
	w	w	w
	w	f	f
	f	w	w ??
	f	f	w ??
materiale Replikation	p	q	nur wenn p, dann q
	w	w	w
	w	f	w ??
	f	w	f
	f	f	w ??

Die Paradoxien der Implikation

Hier nun die Paradoxien der materialen Implikation :

1. $(\neg p \wedge p) \rightarrow q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
5. $(p \rightarrow \neg p) \vee (\neg p \rightarrow p)$
6. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Dass alle diese Formeln Tautologien sind, kann man mit der Methode der Wahrheitstabelle überprüfen. Man kann sie aber auch schneller einsehen, wenn man die Beziehung

benutzt: Im Falle der 6. Formel oben z.B. ist der erste Teil der Disjunktion nur dann nicht wahr, wenn P wahr, aber Q falsch ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr.

Der Philosoph Chales Sanders Peirce hat die oben aufgeführte 6. Variante einmal so illustriert: Wenn man eine Zeitung Satz für Satz zerschneidet, alle Sätze in einen Hut schüttet und zwei beliebige zufällig wieder herausholt, dann ist der erste dieser Sätze eine Folgerung des zweiten oder umgekehrt. Auch an diesem Beispiel sieht man, dass die materiale Implikation überhaupt nichts mit dem Inhalt der beteiligten Aussagen zu tun hat (sondern nur mit den Wahrheitswerten).

1. Paradox (Implikation): Wenn nicht p und p, dann q.

Die Implikation ist laut Wahrheitstabelle dann falsch, wenn der erste Teil wahr ist, der zweite aber falsch. „Wenn nicht p und p kann aber nicht wahr sein, und dann ist die Implikation wahr. Und das ist eben kontraintuitiv.

2. Paradox (Implikation): Wenn p, dann (wenn q, dann p).

Die Implikation ist falsch, wenn p wahr, und die Konsequenz falsch ist. Die Konsequenz ist aber falsch, wenn q wahr und p falsch ist. Und da p nicht zugleich wahr und falsch sein kann, handelt es sich um einen Widerspruch.

3. Paradox (Implikation): Wenn nicht p, dann (wenn p, dann q)

Die Implikation ist dann falsch, wenn nicht p wahr, und die Konklusion falsch. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn p wahr und q falsch. Nicht p und p können aber nicht gleichzeitig wahr sein.

4. Paradox (Implikation): Wenn p, dann q oder nicht q

Die Implikation ist dann falsch, wenn p wahr, und die Konklusion falsch ist. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn q falsch und nicht q ebenfalls falsch ist. und das ist unmöglich.

5. Paradox (Implikation): (wenn p, dann nicht p) oder (wenn nicht p, dann p)

Der erste Teil der Disjunktion ist falsch, wenn p wahr und nicht p falsch ist. Dann wird allerdings der zweite Teil der Disjunktion wahr, was kontraintuitiv ist

6. Paradox (Implikation): (wenn p, dann q) oder (wenn q dann p)

"Im Falle der 6. Formel oben z.B. ist der erste Teil der Disjunktion nur dann (falsch), wenn p wahr, aber q falsch ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr." (Wiki)

Die Paradoxien der Replikation

Nun können wir auch endlich die sich ergebenden Paradoxien der materialen Replikation angeben. Dabei ist lediglich zu berücksichtigen, dass die materiale Replikation nur dann falsch ist, wenn p falsch ist, und q wahr. Hier die sechs Paradoxien:

1. Paradox (Replikation): Nur wenn p, dann (nicht q und q).

Die Replikation ist laut Wahrheitstabelle dann falsch, wenn der zweite Teil wahr ist, der erste aber falsch. „Wenn nicht p und p kann aber nicht wahr sein, und dann ist die Replikation wahr. Und das ist eben kontraintuitiv.

2. Paradox (Replikation): Nur wenn (nur wenn q, dann p), dann q.

Die Replikation ist falsch, wenn der erste Teil falsch ist, und q wahr. Der erste Teil ist aber falsch, wenn p wahr und q falsch ist. Und da q nicht zugleich wahr und falsch sein kann, handelt es sich um einen Widerspruch.

3. Paradox (Replikation): Nur wenn (nur wenn p, dann q), dann nicht q.

Die Replikation ist dann falsch, wenn der erste Teil falsch ist, und nicht q wahr. Ersteres ist nur dann der Fall, wenn p falsch ist und q wahr. Nicht q und q können aber nicht gleichzeitig wahr sein.

4. Paradox (Replikation): Nur wenn (p oder nicht p), dann q.

Die Replikation ist dann falsch, wenn der erste Teil falsch, und q wahr ist. Ersteres ist aber nur dann der Fall, wenn p falsch und nicht p ebenfalls falsch ist. und das ist unmöglich.

5. Paradox (Replikation): (Nur wenn p, dann nicht p) oder (nur wenn nicht p, dann p).

Der erste Teil der Disjunktion ist falsch, wenn p falsch und nicht p wahr ist. Dann wird allerdings der zweite Teil der Disjunktion wahr, was kontraintuitiv ist

6. Paradox (Replikation): (Nur wenn p, dann q) oder (nur wenn q, dann p).

Im Falle der 6. Formel oben ist der erste Teil der Disjunktion nur dann (falsch), wenn p falsch, aber q wahr ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr.

Die Paradoxien der Äquivalenz

Hier noch eben die beiden Paradoxien der Äquivalenz:

1. Paradox der Äquivalenz: (Nicht p und p) gdw (nicht q und q)

2. Paradox der Äquivalenz: (Nicht p oder p) gdw (nicht q oder q)