

Joachim Stiller

Modallogik

Modaloperatoren

Alle Rechte vorbehalten

Modallogik: Modaloperatoren

Ich möchte hier den Abschnitt 8.1 „Modaloperatoren“ aus dem folgenden Werk wiedergeben und besprechen:

- Thomas Zoglauer: Einführung in die formale Logik für Philosophen

8 Modallogik: 8.1 Modaloperatoren

Die Modallogik stellt eine Erweiterung der Aussagenlogik dar, in der neben der Wahrheit und Falschheit auch Möglichkeit und Notwendigkeit als logische Zustände vorkommen können. In der Aussagenlogik konnten Aussagen immer nur wahr oder falsch sein. Dabei machte es keinen Unterschied, ob eine Aussage nur zufällig oder sogar notwendig wahr ist. *Kontingente Wahrheiten* oder *Tatsachenwahrheiten* sind "zufällig" wahr, weil unsere Welt gerade so beschaffen ist, wie sie ist. Kontingente Wahrheiten drücken daher das Sosein der Welt aus. Dagegen gelten *notwendige Wahrheiten* oder *Vernunftwahrheiten* unabhängig von der Beschaffenheit unserer Welt, wie z.B. die logischen oder mathematischen Wahrheiten.

Kontingente Wahrheiten sind z.B. die Sätze "Die Sonne hat 9 Planeten" oder "Richard Nixon hat 1968 die Wahl zum Präsidenten der Vereinigten Staaten von Amerika gewonnen". Diese Aussagen sind nur zufällig wahr, weil unsere Sonne genau so gut 15 oder gar keinen Planeten haben könnte oder weil die Weltgeschichte auch einen anderen Verlauf genommen haben könnte, bei dem Nixon nicht zum Präsidenten gewählt worden wäre. Im Gegensatz dazu ist der Satz "9 ist größer als 7" oder der Satz vom ausgeschlossenen Dritten notwendig wahr, unabhängig davon, in welcher Welt wir leben.

Neben notwendigen und kontingenten Wahrheiten gibt es aber auch Aussagen, die faktisch falsch sind, aber wahr sein könnten, wenn die Welt anders aussähe oder die Geschichte anders verlaufen wäre. Solche kontrafaktischen oder kontingent falschen Aussagen sind z.B. die Sätze "Die Sonne hat 7 Planeten" oder "Der Vizepräsident der Vereinigten Staaten heißt Jerry Lewis".

Insgesamt sind also 4 Möglichkeiten denkbar:

1. p ist notwendig wahr.
2. p ist wahr, aber nicht notwendig wahr (= p ist kontingent wahr).
3. p ist falsch, aber nicht notwendig falsch (= p ist kontingent falsch).
4. p ist notwendig falsch, d.h. unmöglich.

Immanuel Kant unterscheidet in der Kritik der reinen Vernunft (B 106) drei modale Kategorien: Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit. Zur semantischen Interpretation dieser Begriffe gibt es in der Philosophie verschiedene Auslegungen.

Nicolai Hartmann interpretiert die Grundmodalitäten wie folgt:

1. Notwendigkeit = nicht anders sein können = so sein müssen
2. Wirklichkeit = so und nicht anders sein
3. Möglichkeit = so sein können = nicht anders sein müssen
4. Unmöglichkeit = nicht so sein können = anders sein müssen

Rudolf Carnap gibt in seiner "Logischen Syntax der Sprache" (Wien 1934) den Modalitäten eine syntaktische Deutung:

1. p ist notwendig = p ist analytisch
2. p ist zufällig (kontingent) = p ist synthetisch
3. p ist möglich = p ist widerspruchsfrei (nicht kontradiktorisch)
4. p ist unmöglich = p ist kontradiktorisch (in sich selbst widersprüchlich)

Von *Saul A. Kripke* stammt die heute weitgehend akzeptierte Interpretation der Modalitäten als Realisierungen in *möglichen Welten*, die teilweise auf Gedanken von G.W. Leibniz zurückgeht:

1. p ist notwendig = p ist wahr in allen möglichen Welten
2. p ist wirklich = p ist wahr in unserer Welt
3. p ist möglich = p ist wahr in einer möglichen Welt
4. p ist unmöglich = p ist in keiner möglichen Welt wahr

Es ist nicht ganz klar, was man sich unter einer "möglichen Welt" vorzustellen hat. Nach *David Lewis* sind mögliche Welten so eine Art "Parallel-Universen", die sich in irgendeiner Eigenschaft von unserem Universum unterscheiden: (...)

Kripke wollte seine Theorie möglicher Welten nicht ontologische im Sinne eines modalen Realismus verstanden wissen. Mögliche Welten sind für ihn keine Paralleluniversen oder andere Science-fiction-Phantasiegebilde, sondern lediglich "mögliche Zustände der Welt" oder "kontrafaktische Situationen". "Mögliche Welten sind vollständige 'Weisen, wie die Welt hätte sein können' oder Zustände oder Geschichten der gesamten Welt." (Kripke 1993, S.26) *Kripke* illustriert dies an einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie: Bei einem Wurf mit einem Würfel sind sechs verschiedene Ausgänge denkbar, davon ist nur ein Ausgang wirklich: Es wird eine 1, 2, 3, 4, 5, oder 6 geworfen. Die sechs möglichen Zustände sind für *Kripke* sechs mögliche Welten, von denen nur eine Welt wirklich ist.

In der Modallogik behandelt man die Modalitäten nicht als zusätzliche Wahrheitswerte, neben den zwei bekannten Wahrheitswerten wahr und falsch, sondern man fasst die als [logische] Operatoren auf, die einer Aussage p eine Aussage über eine Modalität zuordnet. Es gibt zwei Grundoperatoren:

M: Möglichkeit

N: Notwendigkeit

Man beachte: Die Modaloperatoren sind nicht wahrheitsfunktional! Mp und Np sind Aussagen und können entweder wahr oder falsch sein, aber der Wahrheitswert von Mp und Np kann nicht aus dem Wahrheitswert von p bestimmt werden. D.h. keine der folgenden Äquivalenzen ist richtig:

$$Mp = p$$

$$Mp = \neg p$$

$$Mp = p \vee \neg p$$

$$Mp = p \wedge \neg p$$

Bei der Modallogik handelt es sich also "nicht" um eine vierwertige Logik, also um eine mehrwertige Logik, sondern doch nur um eine zweiwertige Logik... Zumindest nach üblichem Verständnis... Die Modalitäten sind "keine" eigenständigen Wahrheitswerte, sondern nur Modaloperatoren, also logische Operatoren...

Zwischen den beiden Grundmodalitäten **M** und **N** gelten folgende sprachliche Beziehungen:

1. \mathbf{Mp} = Es ist möglich, dass p = p ist nicht notwendigerweise falsch = $\neg\mathbf{N}(\neg p)$
2. $\mathbf{M}(\neg p)$ = Es ist möglich, dass nicht-p = Es ist nicht notwendig, dass p = $\neg\mathbf{N}(p)$
3. $\neg\mathbf{M}(p)$ = Es ist nicht möglich, dass p = Es gilt notwendiger Weise nicht-p = $\mathbf{N}(\neg p)$
4. $\neg\mathbf{M}(\neg p)$ = Es ist nicht mögliche, das nicht-p gilt = Es ist notwendig, dass p = \mathbf{Np}

Daraus leiten sich die beiden Negationsregeln ab:

$\mathbf{N}(\neg p) = \neg\mathbf{Mp}$... und

$\mathbf{M}(\neg p) = \neg\mathbf{Np}$

Das logische Quadrat der Modalitäten

notwendig \mathbf{Np} $\mathbf{N}(\neg p)$ unmöglich

...möglich \mathbf{Mp} $\mathbf{M}(\neg p)$ nicht notwendig

* Nichts kann zugleich möglich und unmöglich sein, nicht kann zugleich notwendig und nicht-notwendig sein. Möglichkeit und Unmöglichkeit, Notwendigkeit und Nicht Notwendigkeit stehen zueinander in *kontradiktorischem Gegensatz*.

* Nichts Notwendiges ist unmöglich, nicht unmögliches ist notwendig, aber es kann der Fall eintreten, dass etwas zugleich nicht notwendig und nicht unmöglich ist. Notwendiges und Unmögliches stehen zueinander in *konträrem Gegensatz*.

* Etwas kann möglich und nicht-notwendig sein. Mögliches und Nicht-Notwendiges stehen in einem *subkonträren* Verhältnis zueinander. Solche Aussagen, die möglich, aber nicht notwendig sein, nennt man *kontingent* oder *zufällig*

* Aus der Notwendigkeit folgt die Möglichkeit: $\mathbf{Np} \rightarrow \mathbf{Mp}$. "Wenn p notwendig ist, dann ist p auch möglich." (...)

Eigentlich alles ganz einfach... Die Modallogik scheint jedenfalls Hand und Fuß zu haben... Kripke sei Dank...

Joachim Stiller

Münster, 2016

Ende

Zurück zur Startseite