Joachim Stiller

Gottlob Frege: Leben und Werk

Materialien zu Leben und Werk von Gottlob Frege

Gottlob Frege
1. Frege und die Geschichte der Analytischen Philosophie

Ich lasse nun einen Text von Ehlen, Haeffner und Ricken folgen (Philosophie des 20. Jahrhunderts):

Es ist "eine Aufgabe der Philosophie, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet." Sucht man nach einem Programm, das die verschiedenen Richtungen der Analytischen Philosophie miteinander verbindet, so findet man es in diesem Satz aus Freges erstem Werk, der "Begriffsschrift" (1879, XII f.). "Misstrauen gegen die Grammatik", schreibt Wittgenstein in seinen frühesten Aufzeichnungen, "ist die erste Voraussetzung des Philosophierens" (Werkausgabe Bd. 1, 206). Freges für die Analytische Philosophie grundlegende Leistungen sind: Er hat die moderne symbolische oder mathematische Logik und die moderne Semantik geschaffen. Gegen die Tradition des Empirismus hat er gezeigt, dass die Logik nicht Teil der Psychologie ist. In der Diskussion über die Grundlegung der Mathematik ist er der Begründer des sogenannten Logizismus, nach dem die arithmetischen **[Gesetze]** auf logische Gesetze zurückgeführt werden können.
Drei zentrale Gestalten der Analytischen Philosophie wissen sich Frege verpflichtet: Russell, Wittgenstein und Carnap. Es war Russell, der die Bedeutung Freges entdeckte. Durch den Anhang "The Logical und Arithmetical Doctrines of Frege" zu seinem Buch "The Principles of Mathematics" (1903) wurden Freges Theorien bekannt. Im Vorwort des ersten Bandes der von Russell zusammen mit A. N. Whitehead verfassten "Principia Mathematica" heißt es: "In allen Fragen der logischen Analyse sind wir vor allem Frege verpflichtet" (VIII). Wittgenstein schreibt im Vorwort des "Tractatus": "Nur das will ich erwähnen, dass ich den großartigen Werken Freges und den Arbeiten meines Freundes Herrn Bertrand Russell einen großen Teil der Anregungen zu meinen Gedanken schulde." Frege gehört zu den wenigen Autoren, deren Namen in den "Philosophischen Untersuchungen" genannt wird. Nach Carnaps Autobiographie hat Frege den Stärksten Einfluss auf dessen logische und semantische Theorien ausgeübt (Schilpp 1963, 13).
Friedrich Ludwig Gottlob Frege (geboren am 08.11.1848 in Wismar, gestorben am 26.07.1925 in Bad Kleinen/Wismar) studierte in Jena und Göttingen Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie. Es ist möglich, dass R.H. Lotze, den Frege in Göttingen hörte, ihn beeinflusst hat. Gemeinsam ist beiden die Trennung von Logik und Psychologie und die Rückführung der Mathematik auf die Logik. **[Das ist interessant: die Trennung von Logik und Psychologie würde ich mitmachen wollen, die Rückführung der Mathematik auf die Logik nicht. Die Logik hat möglicher Weise nichts mit der Mathematik tun. Gemeinsam ist beiden nur, dass es sich um formale Systeme handelt...]**
1874 habilitierte Frege sich in Jena für Mathematik; dort wurde er 1979 außerordentlicher Professor und 1896 ordentlicher Honorarprofessor. 1879 erschien die "Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens", eine der Arbeiten, mit denen die moderne Logik beginnt. Frege ersetzt die traditionelle Analyse von Aussagen in Subjekt und Prädikat durch die in Funktion und Argument. Er entwickelt die erste Aussagenlogik auf der Grundlage der Wahrheitsfunktionen und eine Theorie der Qualifikation. Das System beruht auf vier primitiven Symbolen: dem Implikator ("wenn...dann"), dem Negator, dem Identitätszeichen und dem Allquantor ("für alle x gilt").

Die "Begriffsschrift" unternimmt erste Schritte, um die Gesetze der Arithmetik aus denen der Logik abzuleiten. Die grundsätzlichen begrifflichen Voraussetzungen für diese Aufgabe leisten „Die Grundlagen der Arithmetik - Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl" (1884).
Wichtige Thesen des Buches sind: Die Zahlangaben enthalten eine Aussage von einem Begriff. In dem Satz 'Die Venus hat 0 Monde' wird vom Begriff Venusmond die Eigenschaft ausgesagt, nichts unter sich zu befassen (§46). Die arithmetischen Gesetze sind analytische Urteile und folglich a priori. **[Das ist umstritten…Knat hielt sie für synthetisch und ich selbst habe versucht nachzuweisen, dass sie „sowohl“ analytisch „als auch“ synthetisch sind…Man sollte diese Frage offen lassen…]** Jeder arithmetische Satz ist ein abgeleitetes logisches Gesetzt. **[Nein!!! Mathematische korrekte Urteile sind zwar auch logisch korrekt, aber das eine hat eben nichts mit dem anderen zu tun... Da werden einfach Äpfel mit Birnen verglichen...]** Die arithmetischen Gesetze sind nicht unmittelbar auf die Natur anwendbar, sondern nur auf die Urteile über die Natur, d.h. auf die Naturgesetze (§ 87). Auf die beiden klassischen Aufsätze zur Semantik "Funktion und Begriff" (1891) und "Über Sinn und Bedeutung" (1892) ist unten kurz einzugehen. 1894 veröffentlichte Frege eine vernichtende Rezension über Husserls psychologistische "Philosophie der Arithmetik". Die "Grundgesetze der Arithmetik", deren erster Band 1893 erschien, sollten den Ansatz der "Grundlagen" mit Hilfe der Symbolsprache im Detail durchführen. Der zweite Band (1903) war im Druck, als Russel am 16.06.1902 an Frege schrieb, dass sich aus dem System der "Grundgesetze" die Antinomie der Klasse aller Klasen, die nicht Glied ihrer selbst sind **[Russellsches Paradox]**, herleiten lasse. In seinem Nachwort sieht Frege deutlich, dass sein Grundgesetz V für die Antinomien verantwortlich ist und dass Korrekturen dort anzusetzen haben. Seine Schaffenskraft war für lange Jahre gelähmt. In seinen letzten Lebensjahren erschienen drei Kapitel einer geplanten Gesamtdarstellung der Logik: "Der Gedanke", "Die Verneinung" (1918) und "Gedankengefüge" (1923). Wichtiges ergänzendes Material enthalten der Nachlass und die Briefe.

Philosophie der Mathematik

Ich lasse nun zunächst eine im Internet veröffentlichte Arbeit des Schweizers Gerald Walti folgen mit dem Titel: „Eine Einführung in die Philosophie der Mathematik“. Ich habe sie nur unwesentlich gekürzt.

1. Immanuel Kants (1724-1804) Philosophie der Mathematik

"Kants Theorie der Mathematik und seine generelle Erkenntnistheorie, die er beide in der "Kritik der reinen Vernunft" (1781/1787) entwickelte, hatten einen sehr großen Einfluss auf die spätere Philosophie der Mathematik (d.h. auf Autoren wie Frege, Hilbert, Brouwer und auf die logischen Empiristen)

In seiner **Erkenntnistheorie** führt Kant zwei wichtige Unterscheidungen ein. Die eine Unterscheidung ist diejenige zwischen analytischen und synthetischen Aussagen. Die andere Unterscheidung ist diejenige zwischen apriorischen und aposteriorischen Erkenntnissen.

Eine *analytisch wahre Aussage* ist nach Kant eine Aussage, in der der Begriff des Prädikats im Subjektbegriff bereits enthalten ist, so dass man nur die Begriffe untersuchen (analysieren) muss, um den Wahrheitswert der Aussage festzustellen. Die Aussage "Alle Junggesellen sind unverheiratet" ist somit analytisch wahr, da im Begriff des Junggesellen der Begriff des Unverheiratetseins bereits enthalten ist.

Synthetische Aussagen sind dagegen solche, in denen zwei unterschiedliche Begriffe zusammengeführt (synthetisiert) werden. Ihr Wahrheitswert kann nicht durch eine bloße Untersuchung der Begriffe, sondern nur durch den Verweis auf etwas - ein X, wie Kant sagt - das außerhalb der Begriffe liegt, bestimmt werden. Dabei kann es sich um Erfahrung handeln, wie beispielsweise im Fall der Aussage "Die Spitze des Rigis ist schneebedeckt. Um ihren Wahrheitswert zu bestimmen, muss nämlich untersucht werden, ob sich die Dinge in der Welt tatsächlich so verhalten.

Eine Erkenntnis ist nach Kant *a priori,* falls wir uns zur Rechtfertigung der Erkenntnis, d.h. zur Rechtfertigung unserer Überzeugung des Wahrheitswerts einer Aussage, nicht auf sinnliche Erfahrung beziehen müssen. Dies bedeutet nicht, dass wir apriorische Erkenntnisse im zeitlichen Sinn vor aller sinnlichen Erfahrung besitzen, dass sie etwa angeboren wären. Wir brauchen natürlich Erfahrungen, um überhaupt zu Konzepten zu gelangen und Aussagen bilden zu können. A priori ist eine Erkenntnis, wenn wir uns zur *Rechtfertigung* unseres Wissens, unserer Überzeugung bezüglich einer Aussage nicht auf Erfahrung stützen müssen.

Im Gegensatz zu den apriorischen Erkenntnissen sind *apriorische Erkenntnisse* solche, bei denen wir uns für die Rechtfertigung auf Erfahrung stützen müssen.

Die Unterscheidung zwischen a posteriori und a priori, die hier ja zunächst als eine Unterscheidung zwischen Erkenntnissen eingeführt wurde, kann man auf Aussagen übertragen. Wir können sagen, dass eine Aussage a priori ist, wenn ihr Wahrheitswert a priori gewusst werden kann, und wir können entsprechend auch von aposteriorischen Aussagen sprechen, wenn sie a posteriori gewusst werden können. Damit ergibt sich nun die Möglichkeit vier klassen von wahren Aussagen zu unterscheiden.

1. synthetisch Aussagen a priori
2. synthetische Aussagen a posteriori
3. analytische Aussagen a priori
4. analytische Aussagen a posteriori

Zu (3) und (4): Wenn eine Aussage analytisch ist, ihr Wahrheitswert als nur aufgrund der Begriffe festgelegt wird, so greifen wir nicht auf die Erfahrung zurück, um unser Wissen bezüglich des Wahrheitswertes zu rechtfertigen, sondern verweisen auf die Begriffsstruktur. Analytischen Aussagen werden also stets a priori gewusst und Kant streicht deshalb die Klasse (4). Es gibt keine analytischen Aussagen a posteriori.

Zu (1) und (2): Wenn eine Aussage synthetisch ist, ihr Wahrheitswert als nur durch ein zusätzliches, außerhalb der Begriffsstruktur liegendes X bestimmt werden kann, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden: a) Handelt es sich bei diesem X um Erfahrung, so muss bei der Rechtfertigung des Wissens bezüglich der Aussage natürlich auch auf Erfahrung zurückgegriffen werden. Die synthetische Aussage wird dann a posteriori gewusst. b) Handelt es sich bei diesem X aber um etwas anderes als Erfahrung, so muss bei der Rechtfertigung folglich nicht auf Erfahrung zurückgegriffen werden und die synthetische Aussage kann in diesem Fall a priori gewusst werden.

Kant interessiert sich nun insbesondere für die Urteile des Typs (1), also für die synthetischen Urteile a priori, da sie in besonderer Weise ausgezeichnet sind: Ebenso wie synthetische Urteile a posteriori erweitern sich unsere Erkenntnis, sind aber gleichzeitig wie analytische Urteile a priori, erfahrungsunabhängig und damit streng allgemein und notwendig.

Kant geht in seiner **Theorie der Mathematik** davon aus, dass die Aussagen der reinen Mathematik synthetisch a priori sind. Wie kommt er dazu, dies anzunehmen?

1. Warum sollten sie a priori sein? Kant nimmt an, dass mathematische Aussagen wie 7 + 5 = 12 oder "Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180 Grad" notwendig wahre Aussagen sind. Sie lassen sich somit durch keine Erfahrung, durch keine Beobachtung der Welt widerlegen. Um unsere Überzeugung bezüglich ihrer Wahrheit zu begründen, müssen wir deshalb auch nicht auf Erfahrung verweisen und z.B. sagen, dass wir bisher noch auf kein Gegenbeispiel gestoßen sind. Dies verhält sich ganz anders mit empirischen Verallgemeinerungen wie etwa "Alle Schwäne sind weiß". Sie sind nicht notwendig wahr und zu ihrer Begründung berufen wir uns auf Erfahrung. Kant schreibt: "Zuvörderst muss bemerkt werden, dass eigentlich mathematische Sätze jederzeit Urteile a priori und nicht empirisch sind, weil sie Notwendigkeit bei sich führen, welche aus Erfahrung nicht abgenommen werden kann." (B15) Mit seiner Annahme, dass Mathematik a priori gewusst wird, stimmt Kant mit den allermeisten seiner Vorgänger und Nachfolger überein.

2. Warum sollten sie synthetisch sein? Mit Bezug auf die Geometrie argumentiert Kant wie folgt (bezüglich der Arithmetik liefert er ein ganz ähnliches Argument): "Eben so wenig ist irgend ein Grundsatz der reinen Geometrie analytisch. Dass die gerade Linie zwischen zweien Punkten die kürzeste sei, ist ein synthetischer Satz. Denn mein Begriff vom Geraden enthält nichts von Größe, sondern nur eine Qualität. Der Begriff des Kürzesten kommt also gänzlich hinzu, und kann durch keine Zergliederung aus dem Begriff der geraden Linie gezogen werden. Anschauung muss also hier zu Hilfe genommen werden, vermittelst deren allein die Synthesis möglich ist." (B17)
Dass mathematische Aussagen synthetisch a priori sind, ist für Kant ein Faktum. Davon geht er aus. Für ihn stellt sich dann das Problem, wie solche Aussagen möglich sind. Das Problem besteht natürlich v.a. darin, zu sagen, worum es sich bei diesem X handelt, auf das wir in synthetischen Aussagen zurückgreifen müssen, wenn es nicht Erfahrung ist. Die Basis für die Lösung dieses Problems bildet Kants Auffassung von Raum und Zeit. Kurz gesagt, sind Raum und Zeit nach Kant nicht Bestandteile der unabhängig von uns bestehenden Welt, der Welt an sich. Sondern Raum und Zeit sind Formen oder Raster unseres Geistes, die alle unsere empirischen Erfahrungen oder Anschauungen strukturieren. Nun glaubt Kant, dass es neben den empirischen Anschauungen auch reine Anschauungen (= reine Intuitionen) gibt, die ganz unabhängig von der sinnlichen Erfahrung bestehen. Mit den reinen Anschauungen können die Formen Raum und Zeit sozusagen inspiziert werden.
Die Lösung, wie mathematische Aussagen als synthetische Aussagen möglich sind, sieht nun wie folgt aus. Das zusätzliche X, das wir benötigen, um ihren Wahrheitswert festzulegen, bilden Konstruktionen in der reinen Anschauung, Im Fall der Geometrie sind es Konstruktionen gemäß der Struktur des Raumes. Im Fall der Arithmetik sind es Konstruktionen gemäß der Zeit.
Mit Hilfe der Konstruktionen in reiner Anschauung gelingt es Kant somit 1. die mathematischen Aussagen als synthetische auszuweisen - er hat das zusätzliche X damit bestimmen können. Es gelingt ihm mit Hilfe der Konstruktion in reiner Anschauung aber 2. auch, die mathematischen Aussagen als apriorische auszuweisen, denn da die Formen Raum und Zeit das Raster für alle möglichen Erfahrungen bilden, können die durch die Konstruktion bestätigten geometrischen und arithmetischen Aussagen niemals durch Erfahrung widerlegt werden. Und zur Begründung unseres Urteils bezüglich ihres Wahrheitswertes müssen wir nur auf diese Konstruktionen in reiner Anschauung und folglich nicht auf eine sinnliche Erfahrung verweisen." (Gerald Walti. "Eine kurze Einführung in die Philosophie der Mathematik")

2. Der Logizismus von Gottlob Frege (1848-1925) und Bertrand Russell (1872-1970)

"Frege teilte mir Kant die Auffassung, dass die Geometrie synthetisch a priori ist. Kants Auffassung bezüglich der Arithmetik hielt er jedoch für falsch. Frege glaubte, dass die Arithmetik analytisch a priori ist. Er glaubte also nicht, dass so etwas wie reine Anschauungen oder Intuitionen für die Arithmetik notwendig sind und er glaubte auch nicht, dass sie auf sinnlicher Erfahrung basiert.

Analyzität definiert Frege allerdings ein wenig anders als Kant: Analytisch ist nach Frege eine Aussage genau dann, wenn sich ihr Wahrheitswert nur aufgrund der Logik und eventuellen Definitionen ergibt. Analytisch wahr ist eine Aussage also kurz gesagt, wenn sie eine logische Wahrheit, d.h. eine Tautologie ist.

Für Frege wäre der Satz: "Alle Junggesellen sind unverheiratete Männer" somit analytisch wahr, falls per Definition festgelegt ist "Junggeselle = Def. unverheirateter Mann". Denn dann erhält man durch Einsetzung die logische Wahrheit. Alle unverheirateten Männer sind unverheiratet. (...) Zur Rechtfertigung unserer Überzeugung bezüglich der Wahrheit solcher Tautologien brauchen wir uns freilich nicht auf Erfahrung zu stützen. Auch unter dieser Definition der Analytizität werden analytische Aussagen also stets a priori gewusst.

Freges Programm ist es, zu zeigen, dass die arithmetischen Aussagen tatsächlich analytisch a priori sind. Er will zeigen, dass die ganze Arithmetik aus den logischen Axiomen und den Definitionen der arithmetischen Begriffe durch logische Begriffe abgeleitet werden kann. Dies ist das Ziel des Logizismus, das später auch Russell und Whitehead verfolgen.

Zur Erreichung dieses Ziels muss Frege als erstes überhaupt die logischen Prinzipien klar formulieren. Dies unternimmt er in einem Werk mit dem Namen "Begriffsschrift", das er 1879 publizierte. Dies ist das erste Werk der modernen mathematischen Logik. Er entwickelt darin eine vollständige Formalisierung der Logik erster Stufe, d.h. also eine vollständige axiomatische Darstellung der Aussagelogik und der Prädikatenlogik erster Stufe.

Der zweite Teil der Aufgabe besteht darin, die arithmetischen Begriffe durch logische zu definieren. Mit diesem Projekt beginnt er in einer Schrift mit dem Namen "Die Grundlagen der Arithmetik", die er 1884 publizierte. In der Schrift "Grundgesetze der Arithmetik", deren erster Band 1893 und deren zweiter Band 1903 erschienen, setzt er sein Vorhaben fort. (...)

Mit einer Ableitung der Arithmetik aus der Logik und den Definitionen kann Frege (...) zwar zeigen, dass die Arithmetik wahr ist, falls die Logik wahr ist. Damit ist aber die Arithmetik noch nicht vollkommen gerechtfertigt. Denn warum sollen wir überhaupt annehmen, dass die Logik wahr ist? Warum scheinen uns die logischen Tautologien so offensichtlich wahr zu sein? Freges diesbezügliche Überzeugung ist die, dass die logischen Gesetze einen objektiven Inhalt haben. Sie beschreiben eine Wirklichkeit die unabhängig vom menschlichen Geist ist und die uns nicht über sinnliche Erfahrung sondern a priori zugänglich ist. Sie beschrieben mit anderen Worten eine platonische Wirklichkeit. Auf den Platonismus kommen wir in Abschnitt 7 erneut zu sprechen.

Freges logizistisches Programm scheiterte. **Bertrand Russell** entdeckte 1902 einen Widerspruch in Freges System, der sich aus Freges Auffassung von Klassen. d.h. Begriffsextensionen, ergibt. (...) Frege setzt dabei voraus, 1. dass Klassen Objekte sind, und 2. dass für alle Objekte a und für alle Begriffe F gilt, dass F(a) entweder wahr oder falsch ist.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich, dass der Begriff "Klasse, die sich selbst enthält" (nennen wie ihn kurz "K") in Freges System wohldefiniert ist. Wir können uns daher fragen, Ob K(k) wahr oder falsch ist, d.h. ob die Klasse aller Klassen, die sich selbst nicht enthält, sich selbst enthält oder nicht.

Es gibt zwei mögliche Fälle. 1) Wenn k sich selbst enthält, dann muss k eine Klasse sein, die sich selbst nicht enthält. Es ergibt also einen Widerspruch. 2) Wenn k sich selbst nicht enthält, dann muss k sich selbst enthalten. Auch hieraus ergibt sich somit ein Widerspruch.

Das ist das sogenannte **Russelsche Paradox.** Es war derart einschneidend, dass Frege nach 4 Jahren vergeblichen Bemühens um eine Lösung den Logizismus - und damit sein Lebenswerk - als gescheitert betrachtete.

Russell und sein Kollege Alfred Whitehead (1861-1947) hielten aber dennoch am Logizismus fest. Sie widmeten die 3 Bände ihres riesigen Werkes "Principia Mathematica", das zwischen 1910 und 1913 erschien, der Ausarbeitung dieser These. Um den mengentheoretischen Paradoxa zu entgehen, entwickelten sie eine sogenannte **Typentheorie.** Die einfache Typentheorie (neben der einfachen entwickelten sie auch noch eine verzweigte) lässt sich wie folgt beschreiben: Zum untersten Typ, dem Typ 0, gehören Individuen (z.B. a, b, c, ...), wobei es sich hier nur um nicht-mathematische Gegenstände handelt. Zum Typ 1 gehören die Klassen dieser Individuen (z.B. f, g, h, ...), zum Typ 2 die Klassen der Klassen dieser Individuen (z.B. F, G, H, ...) etc. Die Kardinalzahlen gehören als Klassen von gleichzahligen Klassen zum Typ 2. Die Hauptregel der Typentheorie besagt, dass jede Klasse zu einem bestimmten Typus gehört und nur aus Elementen des nächstniedrigen Typus bestehen kann. Aussagen der Form f(a), F(f), 3(f) sind daher sinnvoll, während Aussagen der Form f(F), f(g) oder f(f) weder wahr noch falsch sind. Aussagen wie "eine Klasse enthält sich selbst" oder "eine Klasse enthält sich selbst nicht" sind als sinnlos.

Mit Hilfe der Typentheorie was es möglich, den mengentheoretischen Paradoxa zu entgehen. Die Typentheorie nötigte Russell und Whitehead aber weitere Axiome auf, insbesondere das Unendlichkeitsaxiom (aufgrund der einfachen Typentheorie) und das Reduzibilitätsaxiom (aufgrund der verzweigten Typentheorie), die kaum als logische Axiome akzeptiert werden können. Das Unendlichkeitsaxiom beispielsweise besagt, dass es unendlich viele Individuen gibt. Dies ist aber eher eine kontingente empirische Aussage, als eine logische Wahrheit. Russell (1919, S.14) hat dies selbst zugegeben." (Gerald Walti: "Eine kurze Einführung in die Philosophie der Mathematik")

3. Der Formalismus von David Hilbert (1862-143)

"Im Gegensatz zu Frege teilte Hilbert mir Kant die Auffassung, dass sowohl die Arithmetik, wie auch die Geometrie synthetisch a priori ist. Hilbert verwarf allerdings Kants Erklärung für den synthetisch-apriorischen Charakter mathematischer Aussagen. Anstelle von Kants zwei Arten der reinen Anschauung, der räumlichen und der zeitlichen Anschauung, setzte er eine basale Anschauung von Formen (Gestalten) konkreter Zeichen und Figuren. Betrachtet man, so meint er, eine Abfolge wahrnehmbarer Objekte, wie z.B. IIIII, so ist es sinnlich evident, dass die Abfolge III und II zusammen die Abfolge IIIII ergibt. Dies ist eine apriorische Wahrheit. Allerdings keine analytisch-logische, sondern eine synthetisch-sinnliche Wahrheit, eine Wahrheit über die Struktur jeder möglichen Wahrnehmung. Hilbert war sich darüber im Klaren, dass diese seine Ansicht (und auch diejenige Kants) nur den finiten Teil der Mathematik betrifft. Wir können nicht unendlich viele Objekte wahrnehmen. Natürlich können wir, egal wie viele Objekte wir bereits wahrgenommen haben, stets ein weiteres Objekt wahrnehmen, aber wie werden an jedem Punkt immer nur eine endliche Anzahl von Objekten wahrgenommen haben. Rechtfertigen lässt sich über die basale Anschauung von Formen als nur die Mathematik, die eine sog. potentielle Unendlichkeit voraussetzt, nicht aber Theorien, die eine sogenannte aktuale Unendlichkeit voraussetzen.

Für Hilbert stellte sich daher die Frage, wie die gesamte klassische Mathematik mit ihren unendlichen Totalitäten zu rechtfertigen ist. Bezüglich der transfiniten Mengentheorie sagte Hilbert bekannterweise: "Aus dem Paradies, das Cantor geschaffen, soll uns niemand vertreiben können." (Hilbert 1925: 88)

Hilberts geniale Lösung für das Problem sieht wie folgt aus. Er unterteilt die gesamte Mathematik in zwei Teile. Der finite (reale) Teil ist bedeutungsvoll und synthetisch a priori wahr. Die mathematischen Aussagen des infiniten (idealen) Teils sind dagegen bedeutungslos und somit weder wahr noch falsch. $3 < 5$ ist demnach beispielsweise wahr, während $w < 2w$ weder wahr noch falsch ist. Obwohl sie strenggenommen sinnlos sind, sind die Aussagen des infiniten Teils wichtig, da sie die Übergänge zwischen den Aussagen der finiten Mathematikvereinfachen oder Ableitungen neuer finiter Theoreme ermöglichen. Der ideale, infinite Teil besitzt also - kurz gesagt - einen instrumentellen Wert. Natürlich können nicht nach Belieben ideale Elemente eingeführt werden. Bedingung ist, dass sich durch die Einführung idealer Elemente keine Inkonsistenzen ergeben. (Die Inkonsistenzen der Mengenlehre beruhen nach Hilbert beispielsweise auf unvorsichtigen Einführungen idealer Elemente.)

Hilberts Programm besteht nun darin, zu zeigen, dass die unterschiedlichen Teile der infiniten Mathematik untereinander und mit der finiten Mathematik so zusammenpassen, dass keine Widersprüche abgeleitet werden können. Durch Konsistenzbeweise (Beweise, die zeigen, dass in einem System kein Widerspruch abgeleitet werden kann) glaubt Hilbert, den idealen Teil der Mathematik rechtfertigen zu können. (Vgl. Hilbert 1925)
Ein verheerender Einwand gegen Hilberts Programm, aber auch gegen das logizistische Programm, ergab sich durch **Gödels Unvollständigkeitstheoreme,** die er in seinem 1931 publizierten Aufsatz "Über formal unterscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme" entwickelte. Sie lauten wie folgt:

Theorem 1: Es existiert keine konsistente Axiomatisierung (kein konsistenter Algorithmus) der Arithmetik, die (der) vollständig ist.

Theorem 2: Falls eine Axiomatisierung der Arithmetik konsistent ist, so gibt es keinen (finiten) Beweis dafür, dass sie konsistent ist.

Das Theorem 2 wendet sich direkt gegen Hilberts Programm. Das Theorem 1 greift (zwar) ebenfalls eine der (...) Voraussetzungen des Hilbertschen Programms an, (...) wendet sich aber insbesondere gegen den Logizismus." (Gerald Walti ."Eine kurze Einführung in die Philosophie der Mathematik")

4. Der Intuitionismus von L.E.J. Brouwer (1881-1966)

"Aufgrund der Entwicklung nicht-euklidischer Geometrien hielt Brouwer Kants Auffassung der Geometrie für falsch. Er folgte Kant aber in der Annahme, dass die Arithmetik (und die Analysis und Algebra) synthetisch a priori ist. Weiter stimmte er auch Kants Erklärung des synthetisch-apriorischen Charakters der Arithmetik durch zeitliche Anschauung zu. Brouwer beschreibt die zeitliche Anschauung oder Intuition als eine Anschauung der Veränderung an sich, d.h. des Auseinanderfallens eines Lebensmomentes in einen Teil der vergeht und einen Teil der entsteht. Von dieser basalen zeitlichen Anschauung, der Anschauung der *Two-oneness*, wie Brouwer sie auch nennt, gelangt man zu potentiell unendlichen Sequenzen und zur Konstruktion der natürlichen Zahlen, die wiederum die Basis für weitere Konstruktionen bilden können. Brouwers diesbezügliche Erklärungen sind recht verwirrend (vgl. Brouwer 1913 und 1949). Entscheidend für den Intuitionismus ist aber, dass er (und damit folgt er Kant) mathematische Gegenstände als vom Geist gebildete oder konstituierte Gegenstände auffasst. Mathematische Gegenstände haben nicht eine vom menschlichen Geist unabhängige Existenz.

Nach Brouwer und seinen intuitionistischen Nachfolgern (vgl. z.B. Arend Heyting 1956) sind viele Annahmen der klassischen Mathematik nun aber nicht gerechtfertigt, da sie diesen Sachverhalt nicht beachten. Sie postulieren erstens mathematische Gegenstände bzw. Sachverhalte, die außerhalb der menschlichen Konstruktionsfähigkeit liegen. Zweitens verwenden sie nicht-konstruktive Existenzbeweise (die das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten voraussetzen). Konstruktive Existenzbeweise sind, kurz gesagt, Beweise, die, wann immer die Existenz eines so und so charakterisierten mathematischen Gegenstandes behauptet wird, (...) eine Methode angeben, wie der Gegenstand aufgefunden oder konstruiert werden kann.

Brouwers (und später Heytings) **intuitionistisches Programm** ist es, die klassische Mathematik durch eine alternative konstruktive Mathematik zu ersetzen, die die genannten Fehler nicht begeht und insofern gerechtfertigt ist. Anders formuliert: Das Ziel ist es, die Aussagen der klassischen Mathematik zu rechtfertigen, indem nur konstruktive Beweise verwendet werden.

Eine der einschneidendsten Konsequenzen dieses Programms ist die Kritik basaler logischer Begriffe, insbesondere der Negation und des Gesetzes des ausgeschlossenen Dritten. Um dies etwas zu verdeutlichen, betrachten wir das folgende Beispiel:

Angenommen wir möchten wissen, ob p eine Primzahl ist oder nicht. Nehmen wir weiter an, dass wir bereits bewiesen haben, dass p = 3, falls die Goldbachsche Vermutung wahr ist und p = 5 falls die Goldbachsche Vermutung falsch ist.

In der klassischen Mathematik wäre die Antwort auf die Frage, ob p eine Primzahl ist, natürlich "Ja". Denn die Goldbachsche Vermutung ist nach dem Gesetz des ausgeschlossenen Dritten entweder wahr oder falsch. Und in beiden Fällen ist p eine Primzahl. In der konstruktiven Mathematik kann diese Antwort nun allerdings nicht akzeptiert werden. Die Begründung liegt in folgendem:

Die Goldbachsche Vermutung (nennen wir sie abgekürzt GV) besagt, dass jede gerade Zahl die Summe zweier Primzahlen bildet. Bis heute gibt es keinen Beweis dafür, das GV wahr bzw. falsch ist. Solange es nun aber keine konstruktiven Beweis dafür gibt, der zeigt, dass GV wahr ist oder dass -GV wahr ist, kann man nicht davon ausgehen, dass GV überhaupt eine sinnvolle mathematische These ist, der ein Wahrheitswert zukommt. Ebenso wie es bezüglich des Gedankens "Hamlet hat grüne Augen" sinnlos wäre, zu fragen, ob er wahr oder falsch sein, wenn Shakespeare Hamlets Augenfarbe nirgendwo erwähnte, so ist es bezüglich GV sinnlos zu fragen, ob er wahr oder falsch ist, wenn kein Beweis für ihn vorhanden ist, Beide Gedanken sind zunächst einfach Erfindungen unseres Geistes, die ohne unser weiteres Zutun noch keinen Wahrheitswert besitzen. Wir können also nicht einfach gemäß dem Gesetz des ausgeschlossenen Dritten voraussetzen, dass GV entweder wahr oder falsch ist, und damit können wir auch nicht beweisen, dass entweder p = 3 oder p = 5, d.h. dass p eine Primzahl ist." (Gerald Walti: "Eine kurze Einführung in die Philosophie der Mathematik")

5. Der Konventionalismus des logischen Empirismus (zwischen 1930 und 1950)

"Die logischen Empiristen (v.a. Rudolf Carnap, Alfred Jules Ayer und Carl Hempel) verwerfen Kants These, dass es synthetische Aussagen a priori gibt. **[Und was ist mit Kausalsätzen???]** Sämtliche Aussagen sind entweder synthetisch a posteriori oder analytisch a priori. Die mathematischen Aussagen, auch diejenigen der reinen Geometrie sind dabei analytisch a priori.

Die logischen Empiristen unterstützen nun aber nicht einfach den Logizismus von Frege und Russell. Sie halten das logizistische Programm für irrelevant, weil es auf der falschen Annahme beruht, dass mit der Logik und den Definitionen zwei unterschiedliche Typen von Prinzipien fundamental sind für die Mathematik. Die logischen Gesetze nämlich, so meinen sie, ergeben sich letztlich ebenfalls aus konventionellen Definitionen des logischen Vokabulars.
Die **konventionalistische These** der logischen Empiristen lässt sich wie folgt umreißen (vgl. z.B. Ayer 1936, Carnap 1939 und Hempel 1945). Sowohl in der Mathematik wie auch in der Logik versucht man die Konsequenzen sprachlicher Konventionen herauszuarbeiten. Die Aussagen der Mathematik und der Logik sind wahr allein aufgrund der konventionellen Festlegung der Bedeutungen ihres Grundvokabulars. Sie sind nicht wahr, weil ihre Terme auf irgendwelche Gegenstände, seien es platonische Entitäten oder Objekte des Geistes, referieren. Die logischen Empiristen sprechen auch von Wahrheit aufgrund von semantischen Regeln.

Aus dieser Perspektive, d.h. wenn die Logik keinen speziellen Status hat, ist es nun natürlich auch nicht mehr wichtig, ob die Axiome, aus denen die übrigen Aussagen der Mathematik abgeleitet werden, Gesetze der Logik sind. Was zählt bzw. was die mathematischen Aussagen rechtfertigt, ist, dass sie Prinzipien sind oder als Theoreme aus Prinzipien abgeleitet werden, die die Konventionen bezüglich des basalen Vokabulars beinhalten. Was sind das genau für Prinzipien? Es sind die Axiome der mathematischen Teilgebiete, z.B. der euklidischen Geometrie. Dabei sind die mathematischen Teilgebiete als formale axiomatische Systeme zu verstehen, in denen die konventionell festgelegten Axiome die Bedeutung der primitiven Terme implizit definieren (dieser Gedanke geht auf Hilbert (1899) zurück und macht die Annäherung an den Formalismus deutlich).

Wie bereits erwähnt, referieren die Terme der mathematischen Aussagen - der Axiome und Theoreme - nicht auf Gegenstände eines mentalen Bereichs oder platonischen Himmels. Mit anderen Worten, sie besitzen keine Extension, und es wäre daher eigentlich besser, von "Aussagenschemata" und nicht von "Aussagen" zu sprechen. Erst unter einer bestimmten Interpretation ihrer (einer Extensionsangabe für ihre) primitiven Terme werden die Formeln zu bestimmten Beschreibungen z.B. eines physikalischen Bereichs. Dann handelt es sich aber um synthetische Aussagen a posteriori, deren Wahrheitswert nur über Erfahrung bestimmt werden kann.

Der Logiker und Philosoph W.V.Q Quine attackierte die These der logischen Empiristen, dass die Mathematik und Logik aufgrund von Konventionen bzw. semantischen Regeln wahr sind, mit verschiedenen Argumenten (vgl. Quine 1936 und 1962). Eines der frühesten **Gegenargumente Quines,** das auch von Ludwig Wittgenstein vorgebracht wurde, ist das folgende (von ihm können wir aber sagen, dass es keine starke Bedrohung des Konventionalismus bildet, wenn er wie oben formuliert wird):

Es gibt unendlich viele logische Wahrheiten. Daher kann die Aussage, dass logische Wahrheiten durch Konventionen wahr sind, nicht bedeuten, dass jede einzelne logische Wahrheit durch eine Konvention festgelegt wurde. Es kann nur heißen, dass logische Wahrheiten aus Konventionen folgen. "Aus Konventionen folgen" bedeutet aber natürlich nichts anderes als "logisch aus Konventionen folgen". Damit setzen wir aber logische Wahrheiten voraus, die wir erst noch ableiten wollen und geraten in einen Zirkel." (Gerald Walti: "Eine kurze Einführung in die Philosophie der Mathematik")

6. Der Platonismus von Kurt Gödel (1906-1978) und W.V.O. Quine (1908-2001)

"Wie bereits erwähnt, verband Frege seinen Logizismus mit einem Platonismus. Einer der bedeutendsten späteren Vertreter des Platonismus war Kurt Gödel (vgl. Gödel 1964). **Gödels platonische Position,** die von vielen Mathematikern geteilt wird und die weder mit dem Intuitionismus, noch mit dem Formalismus und dem Konventionalismus vereinbar ist, lässt sich in zwei Teilthesen aufspalten:
1) Mathematische Objekte sind ebenso real wie Alltagsgegenstände (z.B. Tische) oder wissenschaftliche Entitäten (z.B. Elektronen). Mathematische Sätze (...) beschreiben ebenso wie "Der Mond umkreist die Erde" eine bestimmte, von uns unabhängige Wirklichkeit und sind wahr oder falsch aufgrund ihrer Übereinstimmung mit dieser Wirklichkeit. Es handelt sich bei den mathematischen Objekten allerdings weder um physikalische Entitäten in Raum und Zeit, noch um mentale Entitäten, die mathematischen Entitäten sind abstrakt, außerhalb von Raum und Zeit liegend und unabhängig von uns.

2) Der menschliche Geist hat die Fähigkeit, mathematische Gegenstände und Sachverhalte wahrzunehmen und zu entdecken. Ähnlich wie er die Fähigkeit hat, physikalische Gegenstände wahrzunehmen und zu entdecken. Diese Art von Wahrnehmung ist allerdings nicht sinnlich. Die mathematischen Erkenntnisse, zu denen der menschliche Geist gelangt, sind daher a priori.

Gödel gelangte zu seiner platonischen Position u.a. im Zusammenhang mit seiner Untersuchung, ob Cantors Kontinuumshypothese korrekt ist. Die Kontinuumshypothese besagt, dass es keine Kardinalität gibt, die größer ist, als die Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen und kleiner als die Kardinalität der reellen Zahlen. (...) Gödel untersuchte, ob die Kontinuumshypothese unabhängig ist von den Axiomen der Mengentheorie (den Zemelo-Fraenkelschen Axiomen), d.h. ob die Negation der Kontinuumshypothese im Zusammenhang mit diesen Axiomen nicht zu einem Widerspruch führt. Wenn ihre Unabhängigkeit festgestellt würde, so wäre eine mögliche Antwort - die Antwort der Formalisten und Konventionalisten - auf die Frage bezüglich der Wahrheit der Hypothese die folgende: Ebenso wie das Parallelenpostulat in der euklidischen Geometrie korrekt ist, nicht aber in einer nicht-euklidischen Geometrie, so können wir von einer cantorschen Mengentheorie sprechen, in der die Kontinuumshypothese korrekt ist, und von einer nicht-cantorschen, in der sie nicht korrekt ist.

Gödel hielt diese Antwort für absolut irreführen. Auch wenn die Unabhängigkeit festgestellt würde (und dies war später der Fall), so sollten wir uns auch dann noch fragen, ob die Hypothese wahr ist oder falsch bzw. welches die korrekte Mengentheorie ist. Die Ansicht Gödels, dass es sich bei solchen mengentheoretischen Axiomen (der Rest der Mathematik kann auf die Mengentheorie reduziert werden) nicht einfach um konventionelle Wahrheiten

(Konventionalisten) oder bedeutungslose, nicht zu Inkonsistenzen führende Sätze (Formalisten) handeln kann, wird von sehr vielen Mathematikern geteilt und führt sie ebenso wie Gödel zum Platonismus.

Eine wichtige Argumentation für den Platonismus, die auch bei Gödel implizit vorhanden ist, kann man wie folgt angeben (die Argumentation setzt sei einem Realismus bezüglich der Wahrheitswerte mathematischer Aussagen an):

(1) Wir möchten sagen, dass alle mathematischen Aussagen einen Wahrheitswert haben, dass sie entweder wahr oder falsch sind, egal, ob wir es je herausfinden können oder nicht. Mathematische Aussagen sind genauso wie alle empirischen Aussagen eindeutig entweder wahr oder falsch.

(2) Um (1) zu erhalten, ist es am plausibelsten, anzunehmen, dass mathematische Aussagen genauso wie empirische Aussagen wahr oder falsch sind, je nachdem, ob sie mit einer bestimmten Wirklichkeit übereinstimmen oder nicht.

(3) Um (2) zu erhalten, müssen wir aber annehmen, dass die mathematische Wirklichkeit aus abstrakten - nicht raumzeitlichen und nicht mentalen - Objekten besteht:

a) Die Objekte, aus denen die mathematische Wirklichkeit besteht, können nämlich keine physikalischen raumzeitlichen Objekte sein. Denn es gibt wahrscheinlich mehr mathematische Wahrheiten als raumzeitliche Objekte und die Wahrheit von mathematischen Aussagen hängt jedenfalls nicht vom Schicksal irgendeines raumzeitlichen Objektes ab.

b) Die Objekte, ais denen die mathematische Wirklichkeit besteht, können aber auch keine mentalen Objekte sein. Denn wir nehmen an, dass die Aussagen der Mathematik auch schon bevor es Menschen gab einen Wahrheitswert hatten, dass sie auch einen Wahrheitswert hätten, wenn es gar nie Menschen gegeben hätte und dass es mehr mathematische Wahrheiten gibt als Menschen jemals mentale Akte produzieren können.

Neben Gödel ist auch **W.V.O. Quine** ein Vertreter der platonischen Position (vlg. Quine 1946 und 1951). Quine unterstützt allerdings nicht die oben erwähnte zweite These und er liefert eine ganz andere Argumentation für den Platonismus. Quine ist der Ansicht, dass die Mathematik nicht als selbständige Disziplin, sondern nur als Teil der gesamten Wissenschaft betrachtet werden kann. um eine Sprache zu besitzen, die reich genug ist, um empirische Wissenschaft zu betreiben, ist es notwendig, über mathematische Gegenstände zu quantifizieren. Wir müssen Existenzsätze (...) bilden, wobei der Wertebereich von x abstrakte mathematische Gegenstände (Mengen) bildet. Die Notwendigkeit von Existenzquantifikationen über abstrakte Mengen ist nun aber nach Quine vergleichbar mit der Notwendigkeit von Existenzquantifikation über theoretische Entitäten wie Elektronen oder Positronen. Mengen und Elektronen sind beides Objekte, die wir postulieren müssen, um die Wissenschaft, wie wir sie gegenwärtig kennen, zu betreiben. Und es ist daher genauso gerechtfertigt, abstrakte Mengen für reale Objekte zu halten, wie es gerechtfertigt ist, Elektronen für reale Objekte zu halten.

Zu den einflussreichsten Kritikern des Platonismus gehört **Paul Benacerraf.** Er bringt zwei Probleme, die mit dem Platonismus verbunden sind, auf den Punkt:

1. Gemäß den Platonisten beschäftigt sich die Mathematik mit abstrakten Objekten, die vom menschlichen Geist unabhängig und außerhalb von Raum und Zeit sind. Solche Objekte

interagieren aber nicht kausal mit anderen Objekten, insbesondere auch nicht mit Menschen. Erkenntnistheorietisch vernünftig ist es aber, anzunehmen, dass eine Person nur dann über ein Objekt etwas wissen kann, wenn es zwischen dem Objekt und der Person eine kausale Verbindung gibt. Wenn wir nun davon ausgehen, dass wir mathematisches Wissen besitzen, so muss demnach entweder unsere beste Erkenntnistheorie oder unsere beste Theorie der mathematischen Wahrheit, nämlich der Platonismus, falsch sein. (Vgl. dazu Benacerraf 1973)

2. Wenn wir annehmen, dass die Mathematik ein Reich abstrakter Objekte beschreibt, so können wir uns fragen, um welche Art von mathematischen Gegenständen es sich handelt. Da mengentheoretische Untersuchungen zeigen, dass mathematische Entitäten, wie Zahlen, Funktionen, Räume, Gruppen etc alle mit Mengen identifiziert werden können, nehmen die meisten Platoniker an, indem sie dem Prinzip folgen, so wenige Entitäten wie möglich zu postulieren, dass die realen Mathematischen Objekte Mengen sind. Nun ergibt sich aber für den Platoniker immer noch das Problem, welche Menge er wählen soll. Es gibt sehr viele Möglichkeiten, z.B. die Arithmetik auf die Mengentheorie zu reduzieren. Worauf referieren also die Zahlen? Man könnte z.B. behaupten, dass 2 = ((->)). Ebenso gut könnte man aber behaupten, das 2 = (-> (->)). (Vgl. dazu Benacerraf 1965)
Als Reaktion auf den Platonismus und die mit ihm verbundenen Probleme gingen in der Philosophie der Mathematik insbesondere zwei Positionen hervor: der Strukturalismus (vgl. z.B. Resnik 1997 und Shapiro 1997) und der Nominalismus (vgl. Field 1980 und Chihara 1973). Auf sie kann hier aber nicht weiter eingegangen werden." (Gerhard Walti: "Eine kurze Einführung in die Philosophie der Mathematik")

2. Funktion und Begriff

Der Aufsatz "Funktion und Begriff" analysiert den elementaren Aussagesatz sowie quantifizierte und wahrheitsfunktionale Aussagesätze mit Hilf des mathematischen Begriffs der Funktion. Nehmen wir als Beispiel einer Funktion $2x^3 + x$. "x" markiert eine Leerstelle, in die eine Zahl, das Argument, eingesetzt werden kann. Da die Funktion Leerstellen enthält, ist sie ergänzungsbedürftig oder ungesättigt. (Wir können eine Funktion durch "F(x)" symbolisieren.) Dagegen ist das Argument, eine Zahl ein abgeschlossenes Ganzes. Setzen wir in eine Funktion ein Argument ein, so erhalten wir einen Wert der Funktion für dieses Argument. So ist z.B 3 der Wert der Funktion $2x^3 + x$ für das Argument 1, denn 2 x 1 + 1 = 3. Freges entscheidender Schritt für die Verwendung des Funktionsbegriffs in der Logik besteht nun darin, dass er die Funktionswerte nicht auf Zahlen beschränkt. Was ist der Wert der Funktion $x^2 = 1$ für die Argumente -1 und 2?
$(-1)^2 = 1$ ist wahr, $2^2 = 1$ dagegen falsch. Wir erhalten als Wert also nicht eine Zahl, sondern einen Wahrheitswert: das Wahre oder das Falsche.
Wenn nun für ein bestimmtes Argument, z.B. -1, der Funktionswert das Wahre ist, so können wir das so ausdrücken: "Die Zahl -1 ist eine Quadratwurzel aus1" oder "-1 fällt unter den Begriff der Quadratwurzel aus 1". Ist der Funktionswert Falsch, so können wir sagen: "2 ist nicht Quadratwurzel aus 1" oder "2 fällt nicht unter den Begriff der Quadratwurzel aus 1". Diese Formulierungen zeigen, wie der mathematische Begriff der Funktion und der logische Begriff des Begriffs zusammenhängen. **[Begriff ist allerdings kein logische Begriff, und ein mathematischer auch nicht]** Ein Begriff ist eine Funktion, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist. Wie eine Gleichung können wir einen elementaren Aussagesatz, z.B. "Cäsar erobert Gallien", in einen abgeschlossenen und einen ungesättigten Ausdruck zerlegen. 'erobert Gallien' ist ungesättigt und bedeutet eine Funktion; 'Caesar' ist abgeschlossen und bedeutet einen Gegenstand. Aber nicht nur Wahrheitswerte und Zahlen, sondern Gegenstände aller Art können Funktionswerte sein. So ist z.B. 'der Vater von x' ein Funktionsausdruck. Setzen wir Isaak als Argument ein, so erhalten wir als Funktionswert Abraham. Freges

nächster Schritt besteht darin, dass er Funktionen untersucht, deren Argumente ein Wahrheitswert ist. Eine solche Funktion erhaltne wir z.B., wenn wir eine elementare Funktion mit einem Allquantor versehen: Für alle x gilt: Fx. Sie hat als Wert das Wahre, wenn die Funktion Fx als Wert immer das Wahr hat. Andere Beispiel sind die Negation und die Implikation.

Interessant finde ich, dass Frege von ganz vielen Funktionen noch gar nicht spricht, so auch nicht von der Äquivalenz, die später der Implikation gegenübergestellt wurde... Tatsächlich hätte aber die Replikation diese Stellung einnehmen müssen... Implikation, Replikation und Äquivalenz sind nämlich gleichberechtigt.

Die formale Logik

Die Logik des Aristoteles hatte 2000 Jahre bestand. Erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts hat sich eine ganz neue Entwicklung in der Logik angebahnt, eingeleitet durch die Arbeiten von George Bool (1815–1864), Augusus de Morgan (1806-1871), vor allem aber von **Gottlob Frege** (1848-1925). Diesen Fortschritt verdankt die Logik der Methode der Formalisierung. Die formale Logik wird aufgrund der Einführung künstlicher Zeichen und Symbole auch oft Symbollogik genannt. Die Symbollogik nimmt nur zwei Wahrheitswerte an, „wahr“ und „falsch“, die mit „w“ und „f“ abgekürzt werden. Dann ergeben sich verschiedene Satzverknüpfungen der Aussagesätze „a“ und „b“ (bei Frege noch „p“ und „q“, was hier vereinfacht wurde) Wir wollen uns zunächst die wichtigsten Satzverknüpfungen und die dazugehörigen Wahrheitstafeln ansehen, allerdings ohne die Symbole mitzuliefern, auf die es nicht so sehr ankommt. Für weitere Aussagesätze „c“, „d“ usw. werden die Wahrheitstafeln entsprechend größer.

Negation	a	nicht b
	w	f
	f	w

Konjunktion	a	b	sowohl a, als auch b
	w	w	w
	w	f	f
	f	w	f
	f	f	f

Ausschließung	a	b	weder a, noch b
	w	w	f
	w	f	f
	f	w	f
	f	f	w

Nicht ausschließende Disjunktion	a	b	entweder a, oder b
	w	w	f
	w	f	w
	f	w	w
	f	f	f

materiale Implikation	a	b	(immer) wenn a, dann b
	w	w	w
	w	f	f
	f	w	w ??
	f	f	w ??

materiale Replikation	a	b	nur wenn a, dann b
	w	w	w
	w	f	w ??
	f	w	f
	f	f	w ??

Ich stelle noch einmal nur die materiale Implikation und die materiale Replikation dar:

materiale ....a ....b ....wenn a,
Implikation...dann b
................................w ....w ....w
................................w................ f ....f
.................................f................ w ....w ??
.................................f ....f...............w ??

materiale ....a ....b ....nur wenn a,
Replikation...dann b
................................w ....w ....w
................................w ....f ....w ??
.................................f ....w ....f
.................................f ....f ....w ??

Habe zusätzlich noch zwei Zeilen besonders hervorgehoben. Da stecken praktisch die Schlussregeln drin...

materiale ....a ....b ....(immer) wenn a,
Implikation ....dann b
................................w ....w ....w....da steckt der Modus Ponens der Implikation drin
................................w................ f ....f…da steckt der Modus Tollens der Implikation drin
.................................f................ w ....w ??
.................................f ....f...........w ??

materiale ....a ....b ......nur wenn a,
Replikation ....dann b
.................................w ....w .....w....da steckt der Modus Ponens der Replikation drin
.................................w ....f ....w ??
.................................f ....w .....f.....da steckt der Modus Tollens der Replikation drin
..................................f ....f ....w ??

Implikation und Replikation

Ich habe in der obigen Übersicht bei der Implikation und der Replikation Fragezeichen an bestimmte Stellen gemacht. Dort ist der Wahrheitswert nicht eindeutig bestimmt. Jeder kann dies durch etwas Überlegung sofort nachvollziehen, zumindest solange er noch über ein intaktes, ursprüngliches und gesundes logisches Empfinden verfügt. Nun kann man natürlich fragen, woran das liegt. Eine einfache Erklärung, die ich gefunden habe, lautet, dass die Implikation und die Replikation hypothetisch sind (Popper), und von daher der Wahrheitswert nicht immer eindeutig bestimmbar ist. Vielleicht gibt es aber auch noch andere Erklärungen. Insgesamt kann man an dieser Stelle nur feststellen, dass die beiden Aussagekalküle der Implikation und der Replikation nicht funktionieren. Sie fallen aus dem System heraus, und müssen entfernt werden. Ja, sie hätte niemals in die Liste der Aussagekalküle aufgenommen werden dürfen. Damit brechen aber weiter Teile der Logik der Aussagekalküle von Frege wie ein Kartenhaus in sich zusammen.

Würde man am Ende verbleibenden drei (vier) Aussagekalküle umfunktionieren, und daraus vier Wahrheitswerte konstruieren, was tatsächlich geht, hätte man eine klassische vierwertige Logik. Ich werde am Ende der Schrift noch einmal darauf eingehen.

3. Sinn Bedeutung und Vorstellung

Da bin ich aber mal gespannt...

In seinem Aufsatz über Sinn und Bedeutung geht Frege aus von der Frage, welche Beziehung der Satz "a ist dasselbe wie b" (a = b) ausdrückt.
a) Handelt es sich um eine Beziehung der Gegenstände, die die beiden Namen "a" und "b" bedeuten? In diesem Fall wäre a = b, wenn es wahr wäre, nicht von a = a verschieden. Dagegen spricht jedoch, dass "a = a" ein analytischer Aussagesatz ist, während Sätze der Form a = b oft eine neue Erkenntnis ausdrücken. Dass der Morgenstern derselbe Planet ist wie der Abendstern, war eine astronomische Entdeckung.
b) Handelt es sich um eine Beziehung zwischen den Namen? Dann würde der Satz "a = b" nur besagen, dass wir für rein und denselben Gegenstand zwei verschiedene Namen haben. Er würde wiederum keine Erkenntnis, sondern nur eine Regelung unseres Sprachgebrauchs

ausdrücken. Wenn wir nur zwischen Namen und Gegenstand unterscheiden, können wir also die Beziehung der Identität nicht erklären.
Hier noch eben eine Arbeit zu den "Denkgesetzen" oder "logischen Axiomen":

Denkgesetze

Als **Denkgesetze** wurden in der Geschichte der Philosophie und der philosophischen Logik, vor allem im Psychologismus des 19. Jahrhunderts, logische Regeln, Gesetzmäßigkeiten oder Grundsätze bezeichnet, insofern sie – dies war die psychologistische Sicht – als Naturgesetze des Denkens betrachtet wurden.

Insbesondere wurden mit den Bezeichnungen **Denkgesetze** und **logische Grundsätze** unterschiedliche Sätze der Identität, der Satz vom Widerspruch, der Satz vom ausgeschlossenen Dritten und der Satz vom zureichenden Grunde zu einer Gruppe zusammengefasst. Diese Sätze, die in unterschiedlichen Formulierungen vorliegen, wurden in der Tradition teils als logische, teils als metaphysische und teils als erkenntnistheoretische Grundsätze betrachtet und sind als solche sowohl vertreten als auch bestritten worden.

Satz der Identität (lat. principium identitatis)

Auf Aristoteles wird der Satz der Selbstidentität aller Dinge, d. h. die für jedes A gültige Feststellung A=A zurückgeführt. Auf Leibnitz geht das Prinzip der Identität ununterscheidbarer Dinge zurück, bei ihm ein metaphysischer Grundsatz, demzufolge für Dinge aus einem Diskursuniversum gilt: Wenn A und B qualitativ identisch sind (d. h. wenn ihnen genau dieselben Eigenschaften zukommen) sind sie auch numerisch identisch (A=B).

Satz vom Unterschied (lat. principium differentitae)

Wenn alles mit sich selbst identisch ist (A=A), dann ist auch alles von allem anderen Verschieden (A≠B). Dieses nenne ich den Satz vom Unterschied, den ich dem Satz der Identität als gleichberechtigt an die Seite stellen möchte. Ich kam auf den Satz durch Untersuchungen der „Wissenschaft der Logik“ von Hegel.

Satz vom Widerspruch (lat. principium contradictionis)

Auf Aristoteles zurückgehend, besagt der Satz vom Widerspruch, dass es unmöglich ist, eine Aussage zugleich zu bejahen und zu verneinen.

Satz vom ausgeschlossenen Dritten (lat. principium exclusi tertii)

Ebenfalls auf Aristoteles zurückgeführt, besagt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, dass die Disjunktion einer Aussage und ihrer Negation stets eine gültige Aussage, also eine Tautologie ist. Dieser Satz ist verwandt, aber nicht identisch mit dem Prinzip der Zweiwertigkeit. Eine Logik, die dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten folgt und in der Schlüsse erlaubt sind, die dem diskursiven Syllogismus entsprechen, ist notwendig zweiwertig.

Satz vom zureichenden Grunde (lat. principium rationis sufficientis)

Ein logisch-metaphysischer Grundsatz von Gottlieb Wilhelm Leibnitz, der besagt, dass jedes Ereignis eine Ursache haben muss beziehungsweise dass es für jede wahre Aussage einen Grund gibt, aus dem sie wahr ist. Als Handlungsanweisung interpretiert, fordert der Satz vom zureichenden Grunde, dass jede wahre Aussage durch eine andere Aussage begründet werde, deren Wahrheit bewiesen ist. Die möglichen Verstöße gegen diese Handlungsanweisung heißen Zirkelschluss und petitio principii.

Dieses ist aber nur eine enge Fassung des Satzes vom zureichenden Grund. Bei Leibnitz ist es allgemeiner gefasst. Man sehe sich einmal den Link zum „Satz vom zureichenden Grund“ an.

Im Philosophielexikon von Anton Hügli und Poul Lübcke (Hrsg.) lesen wir:

„zureichenden Grund, Prinzip vom *(lat.* principium rationis sufficientis), *Leibnitz' Bezeichnung für das Prinzip, dass es einen Grund geben muss, der die Existenz von etwas, das Eintreffen eines Ereignisses oder die Gültigkeit einer Wahrheit zureichend erklärt.“*

Das ist schon eine ganz gute Definition. Ich selbst möchte einmal folgende Formulierungen vorschlagen, die vielleicht noch etwas stringenter sind:

Es gibt immer einen zureichenden Grund, warum a) etwas ist, b) etwas geschieht oder c) ein Urteil, ein Satz oder eine Aussage wahr ist.

Es gibt immer einen Grund:
a) einen Seinsgrund,
b) einen Geschehensgrund,
c) einen Wahrheitsgrund.

Jetzt haben wir auch das richtige Werkzeug, um uns einmal an das Werk „Der Satz vom Grund“ (GA 10) von Heidegger heranzuwagen. Aber zunächst noch eben eine Besprechung von Rafael Capurro

.

3. Sinn, Bedeutung und Vorstellung - Fortsetzung

Wir müssen vielmehr annehmen, dass die beiden Namen denselben Gegenstand auf verschiedene Weise bezeichnen. Dem Unterschied der Zeichen muss ein Unterschied in der Art, wie uns das Bezeichnete gegeben ist, entsprechen. Der Morgenstern erscheint am Morgen und der Abendstern am Abend. Ein Name (Frege versteht darunter jeden Ausdruck, der einen Gegenstand bezeichnet) hat deshalb Sinn und Bedeutung. Die Bedeutung ist der Gegenstand, der er bezeichnet, der Sinn die Art wie der Gegenstand gegeben ist. "Ein Eigenname (Wirt, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) drückt aus seinem Sinn, bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung" (1967, 147). In "Über Sinn und Bedeutung" wendet Frege diese Unterscheidung auch auf den Aussagesatz und auf Nebensätze an, insbesondere im Nachlass und in Briefen auch auf Begriffswärter. Der Sinn eines Aussagesatzes ist der Gedanke (Proposition, Sachverhalt, Aussage), den er ausdrückt, die Bedeutung sein Wahrheitswert.

Teilweise richtig, aber leider noch öfter schlicht falsch. Ich hänge gleich einmal meine eigene Arbeit zu dem Thema "Sinn und Bedeutung" an... Leider ist die Arbeit unvollständig geblieben.

Philosophie des Sinns I

Bedeutungstheorie

Wenn wir uns fragen, was die Bedeutung von Wörtern oder Aussagen ist, so müssen wir auf der Grundlage der letzten Erkenntnisse feststellen, dass Wörter oder ihre Bedeutung in zwei Richtungen entfalten:

1. in Richtung auf die Tatsachen oder Sachverhalte, auf die sie "deuten", und
2. in Richtung auf die den Wörtern oder Aussagen zugrundeliegenden "Konzepte".

Und dann ergibt sich fast ganz automatisch das, was ich einmal das **semantische Dreieck der Bedeutung** nennen möchte:

..............................Konzepte
..................................x..x
...............................x........x
............................x.............x
..................Tatsachen.........Wörter

"Frege versteht unter Bedeutung den Gegenstand einer (sprachlichen) Bezugnahme, also das, worauf eine (sprachliche) Bezugnahme Bezug nimmt, während er unter "Sinn" die Art des Gegebenseins von Gegenständen (Anm.: als Erscheinung, also als mentalem Zustand) versteht." (Markus Gabriel)
Daher seine Differenz von Bedeutung und Sinn. Dies ist aber ein gravierender Irrtum. Die Differenz, die tatsächlich besteht, besteht in Wahrheit anders: Bedeutung ist der Gegenstand einer (sprachlichen) Bezugnahme "als Gegenstand und als Konzept" der (sprachlichen) Bezugnahme, während Sinn das Zusammenfallen des Gegenstandes und des Konzeptes mit der (sprachlichen) Bezugnahme meint. Bei Frege fehlt einfach die sprachphilosophische Dimension.

Zur Philosophie des Sinns II

Handlungstheorie

Ziel oder Zweck	Handlung	Motiv oder Grund
Finalität der Handlung		Grund der Handlung

Wir handeln immer nur auf Grund eines Mangels

Zur Philosophie des Sinns III

1.

Man kann von Ziel und Zweck einer Handlung sprechen.

Man kann auch von Sinn und Zweck einer Handlung sprechen.

Man kann nicht von Ziel und Sinn einer Handlung sprechen.

Der Begriff "Zweck" ist hier kategorienübergreifend.

2.

Man kann Von Sinn und Bedeutung von sprachlichen Äußerungen sprechen.

Man kann von Sinn und Bedeutung von Worten sprechen.

Man kann von Sinn und Bedeutung von sprachlichen Zeichen sprechen.

Man kann von Sinn und Bedeutung auch von anderen Zeichen sprechen.

Man kann von Sinn und Bedeutung von Symbolen sprechen.

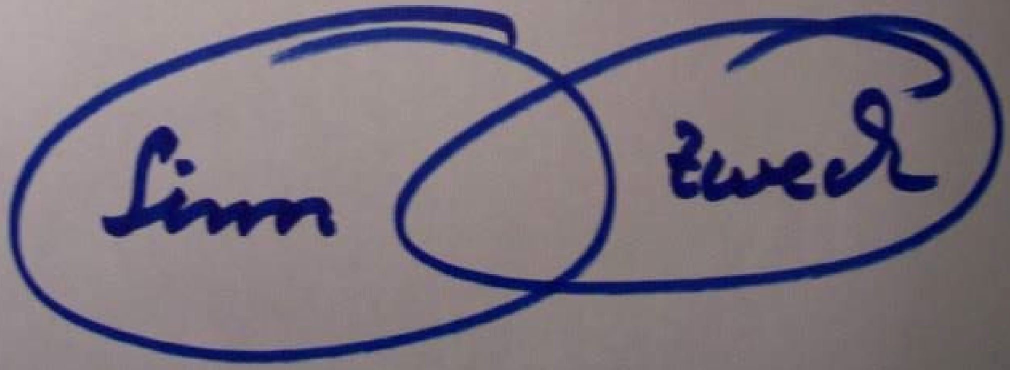
3.

Wir sprechen von Sinn und Zweck von Handlungen (im Sinne einer Handlungstheorie)

Wir sprechen von Sinn und Bedeutung von sprachlichen Äußerungen, Zeichen und Symbolen (im Sinne einer Bedeutungstheorie)

Der Begriff "Sinn" ist hier kategorienübergreifend.

Bedeutung, Sinn und Zweck



4.

Man kann von Sinn und Bedeutung von allem Zeichenhaften sprechen.

Bedeutung meint das, was etwas Zeichenhaftes meint.

Bedeutung meint aber auch die Wichtigkeit einer Sache.

Der Begriff "Bedeutung" ist hier kategorienübergreifend.

Handlungen haben Sinn und Zweck, Gegenstände haben nur Zweck, wenn überhaupt.

3. Sinn, Bedeutung und Vorstellung - Fortsetzung

Vom Sinn und der Bedeutung unterscheidet Frege die Vorstellung. Sie ist ein subjektives inneres Bild, eine subjektive Assoziation. Dagegen ist der Sinn nicht subjektiv. Verschiedene Menschen können nicht dieselbe Vorstellung haben aber sie können mit einem Namen denselben Sinn verbinden. **[Ich halte diese Zusammenstellung für falsch. Ich selbst unterscheide Bedeutung, Sinn und Zweck]**

In der Einleitung zum ersten Band der "Grundgesetze" setzt Frege sich ausführlich mit dem Psychologismus auseinander. Wer behauptet Denkgesetze seien psychologische Gesetze, übersieht den Unterschied zwischen der Wahrheit und dem Fürwahrhalten. **{Yep... Genau das...]** "Es ist kein Widerspruch, dass etwas wahr ist, das von allen für falsch gehaltne wird" (XV f.). Das Wahrsein ist unabhängig davon, dass es von jemand anerkannt wird. **[Meine einzige Hoffnung auf Naturwissenschaftlichem Gebiet]** Der Psychologismus löst Gegenstände und Begriffe in Vorstellungen auf und führt sie zum Idealismus und Solipsismus. In "Der Gedanke" entwickelt Frege eine Ontologie, die außer dem Wahrnehmbaren und dem Psychischen einen dritten Bereich annimmt, dem der Gedanke angehört. "Wenn man einen Gedanken fasse oder denkt, so schafft man ihn nicht, sondern tritt nur zu ihm, der schon vorher bestand, in eine gewisse Beziehung, die verschieden ist von der des Sehens eines Dinges und von der des Habens einer Vorstellung" (1967,354). **[Na ja, das ist jetzt aber doch sehr idealistisch, und passt nicht recht in das System.]**

Joachim Stiller Münster, 2016

Ende

Zurück zur Stratseite

Ende

Zurück zur Startseite